Методические аспекты обучения математике в средней школе в условиях внедрения ФОП

19.03.2024, г. Калининград

Мардахаева Елена Львовна, канд. пед. наук, доцент, Лауреат Премии Грант Москвы в сфере образования, автор УМК «Лаборатория А.Г.Мордковича»

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

ЕДИНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Основное общее образование

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

(базовый уровень)

(для 5–9 классов образовательных организаций)

Москва – 2023

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

(углублённый уровень)

(для 7–9 классов образовательных организаций)

Москва – 2023

Среднее общее образование

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

(базовый уровень)

(для 10–11 классов образовательных организаций)

Москва – 2023

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

(углублённый уровень)

(для 10–11 классов образовательных организаций)

Москва – 2023

Объём часов, предусмотренный программами на изучение математики в основной и средней школе

Базовый уровень	Углублённый уровень
Настоящей программой предусматривается выделение в учебном плане на изучение математики в 5-6 классах **5 учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **340 учебных часов**	
в 7-9 классах **6 (3+2+1) учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **612 (306+204+102) учебных часов**.	в 7-9 классах **8 (4+3+1)учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **816 (408+306+102) учебных часов**.
В учебном плане на изучение математики в 10-11 классах отводится **5 учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **340 (170+102+68) учебных часов.** (из них в 10 кл. 2+2+1, в 11 кл. 3+1+1)	В учебном плане на изучение математики в 10-11 классах на отводится **8 (4+3+1) учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **544 (272+204+68) учебных часов**.
Тематическое планирование учебных курсов и рекомендуемое распределение учебного времени для изучения отдельных тем, предложенные в настоящей программе, надо рассматривать как **примерные ориентиры** в помощь составителю авторской рабочей программы, и прежде всего учителю. **Автор** рабочей программы вправе **увеличить или уменьшить предложенное число** учебных часов на тему, чтобы углубиться в тематику, заинтересовавшую обучающихся, или направить усилия на преодоление затруднений. Допустимо также локальное **перераспределение и перестановка** элементов содержания курса внутри данного класса.	

Нормативно-правовое регулирование использования учебных пособий

Использование учебных пособий закреплено Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» и Федеральными государственными образовательными стандартами

№ 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»

Федеральные государственные образовательные стандарты


РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЗАКОН

Об образовании в Российской Федерации

Принят Государственной Думой 21 декабря 2012 года

Одобрен Советом Федерации 26 декабря 2012 года

Глава 1. **Общие положения**

Статья 18, п. 4; Статья 35, п. 2


МИНИСТЕРСТВО ЮСТИЦИИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЗАРЕГИСТРИРОВАНО

Регистрационный № 64100

от "05" июля 2021.

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

(МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ)

ПРИКАЗ

«31» мая 2021 г. № 286

Москва

Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования

В соответствии с подпунктом 4.2.30 пункта 4 Положения о Министерстве просвещения Российской Федерации, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2018 г. № 884 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2018, № 32, ст. 5343), и пунктом 27

ФГОС НОО, ст. 36[1]


МИНИСТЕРСТВО ЮСТИЦИИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЗАРЕГИСТРИРОВАНО

Регистрационный № 64101

от "05" июля 2021.

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

(МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ)

ПРИКАЗ

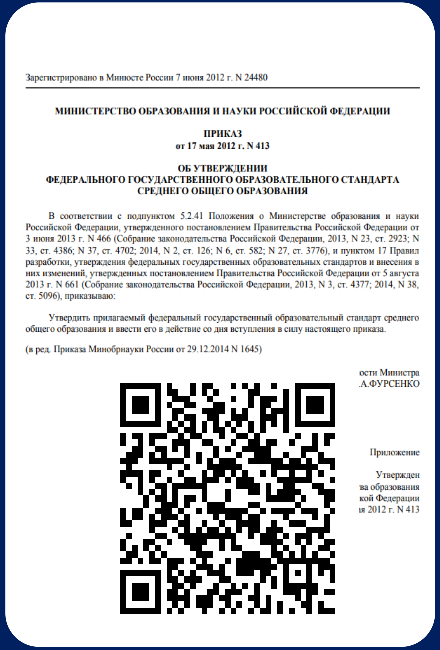
«31» мая 2021 г. № 287

Москва

Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования

В соответствии с подпунктом 4.2.30 пункта 4 Положения о Министерстве просвещения Российской Федерации, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2018 г. № 884 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2018, № 32, ст. 5343), и пунктом 27

ФГОС ООО, ст. 37.3[2]


Зарегистрировано в Минюсте России 7 июня 2012 г. N 24480

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПРИКАЗ
от 17 мая 2012 г. N 413

ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

В соответствии с подпунктом 5.2.41 Положения о Министерстве образования и науки Российской Федерации, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 3 июня 2013 г. N 466 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2013, N 23, ст. 2923; N 33, ст. 4386; N 37, ст. 4702; 2014, N 2, ст. 126; N 6, ст. 582; N 27, ст. 3776), и пунктом 17 Правил разработки, утверждения федеральных государственных образовательных стандартов и внесения в них изменений, утвержденных постановлением Правительства Российской Федерации от 5 августа 2013 г. N 661 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2013, N 3, ст. 4377; 2014, N 38, ст. 5096), приказываю:

Утвердить прилагаемый федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования и ввести его в действие со дня вступления в силу настоящего приказа.

(в ред. Приказа Минобрнауки России от 29.12.2014 N 1645)

ФГОС СОО, ст. 27[3]

1. Приказ Министерства просвещения РФ от 31.05.2021 № 286
2. Приказ Министерства просвещения РФ от 31.05.2021 № 287
3. Приказ Министерства просвещения РФ от 17 мая 2012 г. № 413

Приказ № 858 Министерства просвещения РФ от 21 сентября 2022 г. «Об утверждении федерального перечня учебников …»

Статус учебных пособий

Использование учебных пособий закреплено Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» и Федеральными государственными образовательными стандартами

1. Приказ Министерства просвещения РФ от 18 июля 2022 г. № 569
2. Приказ Министерства просвещения РФ от 18 июля 2022 г. № 568

№ 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»

Статья 18. Печатные и электронные образовательные и информационные ресурсы

4. Организации, осуществляющие образовательную деятельность по имеющим государственную аккредитацию образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования, для использования при реализации указанных образовательных программ **используют:**
2) учебные пособия, выпущенные организациями, входящими в перечень организаций, осуществляющих выпуск учебных пособий …

Статья 35. Пользование учебниками, учебными пособиями, средствами обучения и воспитания

2. Обеспечение учебниками и **учебными пособиями, а также учебно-методическими материалами, средствами обучения и воспитания организаций, осуществляющих образовательную деятельность** по основным образовательным программам, в пределах федеральных государственных образовательных стандартов … **осуществляется за счет бюджетных ассигнований** федерального бюджета, бюджетов субъектов Российской Федерации и местных бюджетов.

Федеральные государственные образовательные стандарты

36.1[1]. Организация должна предоставлять не менее одного учебника и (или) **учебного пособия в печатной форме, … на каждого обучающегося** по учебным предметам: русский язык, математика, окружающий мир, литературное чтение, иностранные языки, а также **не менее одного** учебника и (или) **учебного пособия в печатной и (или) электронной форме, … на каждого обучающегося по иным учебным предметам** (дисциплинам, курсам) входящим **как в обязательную часть учебного плана указанной программы, так и в часть, формируемую участниками образовательных отношений**.

37.3[2]. Организация должна предоставлять не менее одного учебника и (или) **учебного пособия** в печатной форме, … **на каждого обучающегося** по учебным предметам: русский язык, математика, физика, химия, биология, литература, география, история, обществознание, иностранные языки, информатика, а также **не менее одного** учебника и (или) **учебного пособия** в печатной и (или) электронной форме, … **на каждого обучающегося по иным учебным предметам (дисциплинам, курсам), входящим как в обязательную часть учебного плана** указанной программы, **так и в часть, формируемую участниками образовательных отношений**.

Повышение статуса учебного пособия

Обеспечить различные виды компоновки единиц содержания (в зависимости от объема):

- учебный предмет;
- учебный курс;
- учебный модуль

Возможность реализации **индивидуальных учебных планов**, в том числе с возможностью сокращения сроков обучения

Возможность **углублённого изучения** отдельных предметов

Возможность для организации, которая является федеральной или региональной инновационной площадкой, **самостоятельно выбирать траекторию изучения** содержания образования

Линия уравнений и неравенств в ФРП базовый уровень

класс	содержание	результаты
10	Уравнение, корень уравнения. Неравенство, решение неравенства. Метод интервалов. Решение целых и дробно-рациональных уравнений и неравенств. Решение иррациональных уравнений и неравенств. Решение тригонометрических уравнений Применение уравнений и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.	оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство, целое, рациональное, иррациональное уравнение, неравенство, тригонометрическое уравнение; выполнять преобразования тригонометрических выражений и решать тригонометрические уравнения выполнять преобразования целых, рациональных и иррациональных выражений и решать основные типы целых, рациональных и иррациональных уравнений и неравенств; применять уравнения и неравенства для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Линия уравнений и неравенств в ФРП базовый уровень

класс	содержание	результаты
11	Преобразование выражений, содержащих логарифмы Преобразование выражений, содержащих степени с рациональным показателем. Примеры тригонометрических неравенств. Показательные уравнения и неравенства. Логарифмические уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений. Системы и совокупности рациональных уравнений и неравенств. Применение уравнений, систем и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.	применять свойства степени для преобразования выражений, оперировать понятиями: показательное уравнение и неравенство, решать основные типы показательных уравнений и неравенств; выполнять преобразования выражений, содержащих логарифмы, оперировать понятиями: логарифмическое уравнение и неравенство, решать основные типы логарифмических уравнений и неравенств; находить решения простейших тригонометрических неравенств; оперировать понятиями: система линейных уравнений и её решение, использовать систему линейных уравнений для решения практических задач; находить решения простейших систем и совокупностей рациональных уравнений и неравенств; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства и системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Линия уравнений и неравенств в ФРП углублённый уровень

класс	содержание	результаты
10	Тождества и тождественные преобразования. Уравнение, корень уравнения. Равносильные уравнения и уравнения-следствия. Неравенство, решение неравенства. Основные методы решения целых и дробно-рациональных уравнений и неравенств. Многочлены от одной переменной. Деление многочлена на многочлен с остатком. Теорема Безу. Многочлены с целыми коэффициентами. Теорема Виета. Преобразования числовых выражений, содержащих степени и корни. Иррациональные уравнения. Основные методы решения иррациональных уравнений.	свободно оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство, равносильные уравнения и уравнения-следствия, равносильные неравенства; применять различные методы решения рациональных и дробно-рациональных уравнений, применять метод интервалов для решения неравенств; свободно оперировать понятиями: многочлен от одной переменной, многочлен с целыми коэффициентами, корни многочлена, применять деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу и теорему Виета для решения задач;

Линия уравнений и неравенств в ФРП углублённый уровень

класс	содержание	результаты
10	Показательные уравнения. Основные методы решения показательных уравнений Преобразование выражений, содержащих логарифмы Логарифмические уравнения. Основные методы решения логарифмических уравнений Основные тригонометрические формулы. Преобразование тригонометрических выражений Решение тригонометрических уравнений. Решение систем линейных уравнений. Матрица системы линейных уравнений. Определитель матрицы 2×2, его геометрический смысл и свойства, вычисление его значения, применение определителя для решения системы линейных уравнений.	свободно оперировать понятиями: система линейных уравнений, матрица, определитель матрицы 2×2 и его геометрический смысл, использовать свойства определителя 2×2 для вычисления его значения, применять определители для решения системы линейных уравнений, моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных уравнений, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат. использовать свойства действий с корнями для преобразования выражений; выполнять преобразования числовых выражений, содержащих степени с рациональным показателем; использовать свойства логарифмов для преобразования логарифмических выражений;

Линия уравнений и неравенств в ФРП углублённый уровень

класс	содержание	результаты
10	Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений. Исследование построенной модели с помощью матриц и определителей Построение математических моделей реальной ситуации с помощью уравнений и неравенств. Применение уравнений и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.	свободно оперировать понятиями: иррациональные, показательные и логарифмические уравнения, находить их решения с помощью равносильных переходов или осуществляя проверку корней; применять основные тригонометрические формулы для преобразования тригонометрических выражений; свободно оперировать понятием: тригонометрическое уравнение, применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических уравнений; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

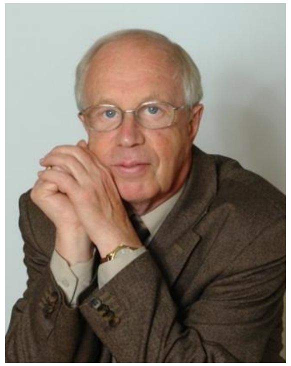
Линия уравнений и неравенств в ФРП углублённый уровень

класс	содержание	результаты
11	Система и совокупность уравнений и неравенств. Равносильные системы и системы-следствия. Равносильные неравенства. Отбор корней тригонометрических уравнений с помощью тригонометрической окружности. Решение тригонометрических неравенств. Основные методы решения показательных и логарифмических неравенств. Основные методы решения иррациональных неравенств. Основные методы решения систем и совокупностей рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений	свободно оперировать понятиями: иррациональные, показательные и логарифмические неравенства, находить их решения с помощью равносильных переходов; осуществлять отбор корней при решении тригонометрического уравнения; свободно оперировать понятием тригонометрическое неравенство, применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических неравенств; свободно оперировать понятиями: система и совокупность уравнений и неравенств, равносильные системы и системы-следствия, находить решения системы и совокупностей рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств; решать рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства, **содержащие модули и параметры;**

Линия уравнений и неравенств в ФРП углублённый уровень

класс	содержание	результаты
11	Уравнения, неравенства и системы с параметрами Применение уравнений, систем и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни, интерпретация полученных результатов.	**применять графические методы** для решения уравнений и неравенств, а также задач с параметрами моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат.

Ключевые идеи



Александр Григорьевич Мордкович

Математика в школе – учебный предмет

Математика в школе – предмет общекультурной направленности с гуманитарным потенциалом

Уровни строгости введения понятия

Н – наглядно-интуитивный уровень

Р – рабочий уровень

Ф – формальное определение свойства

функции → уравнения → преобразования

описательная статистика → вероятность → комбинаторика

Алгебра, 7-9 классы

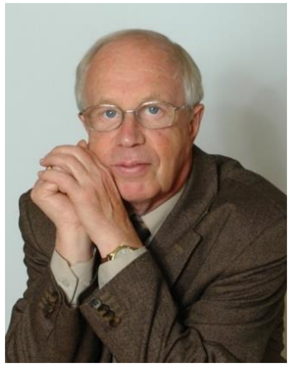
Математика – это язык, на котором говорят все точные науки.
Н.И.Лобачевский

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Класс	Функция	Реальные и физические процессы
7 класс	Линейная функция.Функция $y = x^2$. Кусочная функция.	Равномерные процессы.
8 класс	Квадратичная функция. Функции $y = \|x\|$, $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.	Равноускоренные процессы.
9 класс	Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.	
10 класс	Тригонометрические функции. Степенные, показательные и логарифмические функции.	Периодические процессы, гармонические колебания. Процессы органического роста.
11 класс	Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.	Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

Н – наглядно-интуитивный уровень
Р – рабочий уровень
Ф – формальное определение свойства



Александр Григорьевич Мордкович

Свойство	Класс				
	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
Область определения	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Монотонность	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Непрерывность	Н	Н	Н	Н	Ф
Ограниченность	-	Н, Р	Ф	Ф	Ф
Выпуклость	-	Н	Н	Н	Н
Область значений	-	Н, Р	Ф	Ф	Ф
Четность	-	-	Ф	Ф	Ф
Периодичность	-	-	-	Ф	Ф
Дифференцируемость	-	-	-	-	Н
Экстремумы	-	-	-	-	Ф

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

Фундаментальное ядро системы задач

- Преобразование графиков.
- Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке.
- Графическое решение уравнений, систем уравнений, неравенств.
- Функциональная символика.
- Кусочно заданные функции.
- Чтение графика.

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Оглавление


АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ЧАСТЬ 2
10
КЛАСС
АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ЧАСТЬ 1
10
КЛАСС

Оглавление

Оглавление


АЛГЕБРА
и начала математического анализа
11 класс
АЛГЕБРА
и начала математического анализа
11 класс

Оглавление

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

	Повторение.	**15**
	Степень с натуральным, целым и действительным показателями.	1
	Корень степени $n > 1$ и его свойства. Иррациональные уравнения.	1
	Тождественные преобразования выражений. Выражения, содержащие корни n–й степени. Формулы.	1
	Преобразование тригонометрических выражений.	1
	Тригонометрические функции.	1
	Тригонометрические уравнения.	1
	Логарифм и его свойства. Логарифмические выражения.	1
	Логарифмические уравнения.	1
	Логарифмические неравенства.	1
	Показательные уравнения.	1
	Показательные неравенства.	1
	Функции и их свойства. Графики функций. Касательная.	1
	Применение производной к исследованию функций.	1
	Использование вероятностей и статистики при решении прикладных задач.	1
	Применение метода математического моделирования при решении различных задач.	1
		102

§ 1. Что такое числовая окружность

§ 2. Числовая окружность на координатной плоскости

§ 3. Дуги числовой окружности на координатной плоскости

§ 4. Понятия косинуса и синуса числа

§ 5. Понятия тангенса и котангенса числа

§ 6. Соотношения между тригонометрическими функциями

§ 7. Тригонометрические функции углового аргумента

§ 8. Периодические функции

§ 9. Свойства и график функции $y = \cos x$

§ 10. Свойства и график функции $y = \sin x$

§ 11. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$

§ 12. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$

§ 13*. График гармонического колебания

§ 14. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Числовая окружность – система дидактических заданий

1. Длина дуги единичной окружности.

2. От «хорошего» числа к точке.

3. От «плохого» числа к точке.

4. От «хорошей» точки к числу.

5. От дуги к её аналитической записи.

1. Длина дуги единичной окружности

1.1. а) Первая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от A, а вторая — точкой K пополам. Найдите, чему равны длины дуг AM, AN, AK, BK, MK, CN.
б) Вторая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от B, а третья — на две равные части точкой K. Вычислите длину дуги: BM, AN, MK, BK, MD, CN.

1.2. а) Вторая четверть числовой окружности разделена точкой T в соотношении $2:3$, считая от B. Вычислите длину дуги: AT, BT, CT, DT.
б) Четвёртая четверть числовой окружности разделена точкой H в соотношении $5:1$, считая от B. Вычислите длину дуги: AH, BH, CH, DH.

В следующих задачах рассмотрено движение минутной и часовой стрелок на часах с круговым циферблатом[1].

1.15. Сколько полных оборотов сделает минутная стрелка за время:
а) с 12:00 до 13:00; г) с 19:00 сегодня до 8:00 завтра;
б) с 13:00 до 15:00; д) с 23:00 сегодня до 12:00 послезавтра;
в) с 17:00 до 24:00; е) с 17:00 30 декабря до 7:00 2 января?

1.16. По числу n полных оборотов минутной стрелки и началу a отсчёта времени найдите конец b отсчёта или по концу b найдите начало a отсчёта времени.
а) $a = 12{:}15$, $n = 5$, $b = ?$; г) $b = 8{:}05$, $n = 5$, $a = ?$;
б) $a = 13{:}30$, $n = 10$, $b = ?$; д) $b = 9{:}10$, $n = 25$, $a = ?$;
в) $a = 14{:}45$, $n = 15$, $b = ?$; е) $b = 10{:}15$, $n = 40$, $a = ?$.

1.17. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за время:
а) с 12:00 до 12:15; г) с 9:10 до 10:05;
б) с 15:00 до 15:30; д) с 11:35 до 12:40;
в) с 8:40 до 9:05; е) с 23:59 до 00:11?

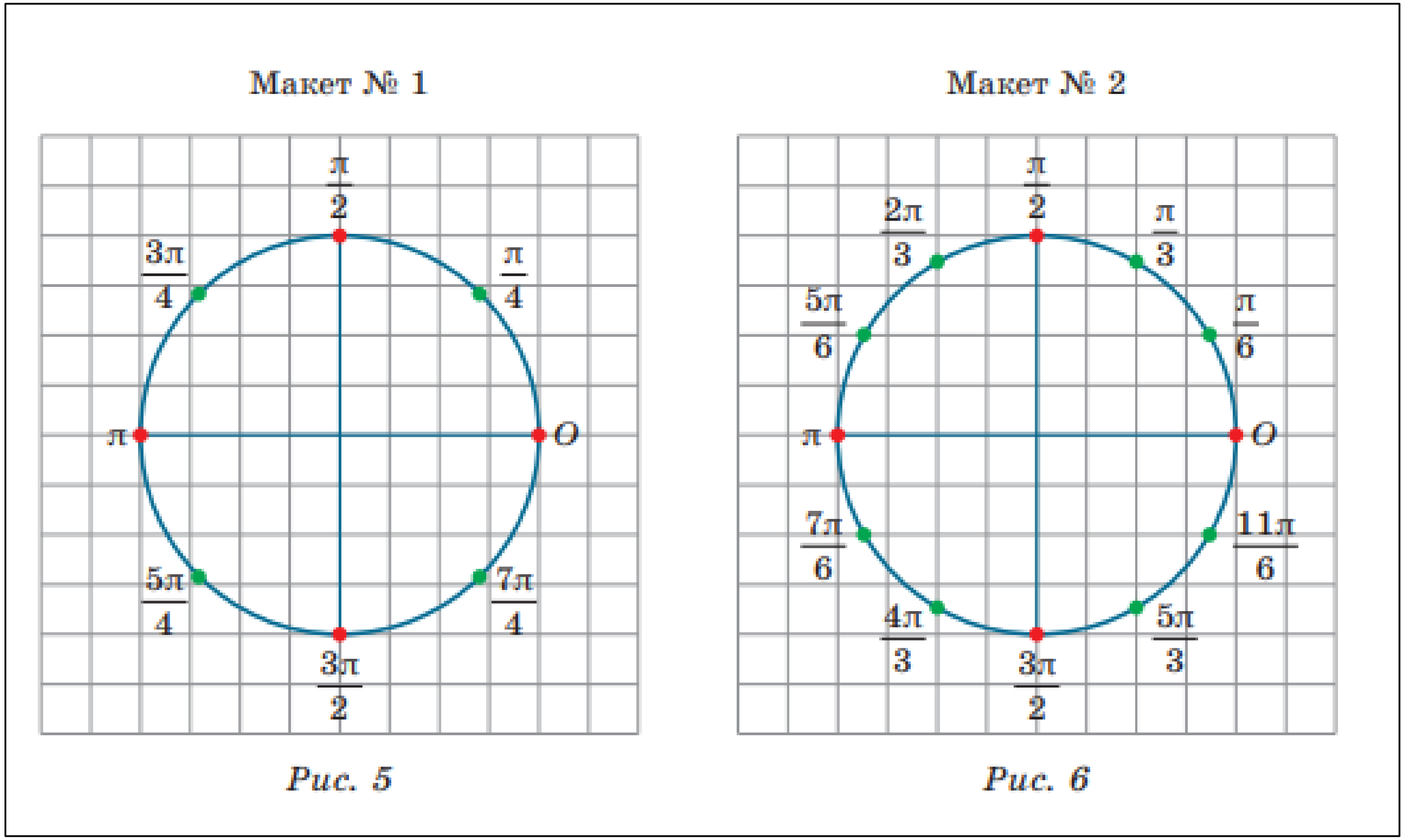
2. От «хорошего» числа к точке

Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу.

1.3. а) $\frac{2\pi}{3}$;

1.4. а) $-\frac{29\pi}{6}$;

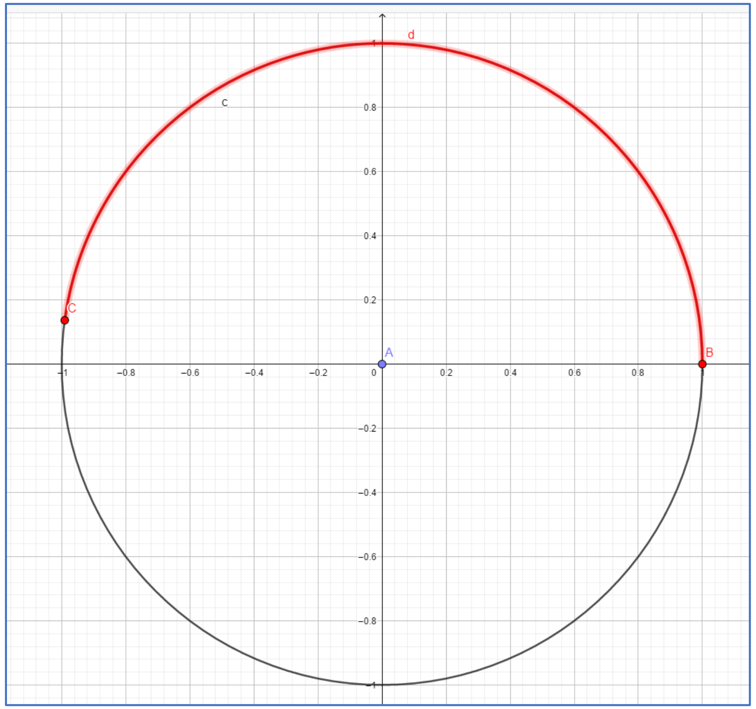
1.5. а) $\frac{4\pi}{9}$;



3. От «плохого» числа к точке

Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу.

ИКТ **1.6.** а) 3;



3. От «плохого» числа к точке

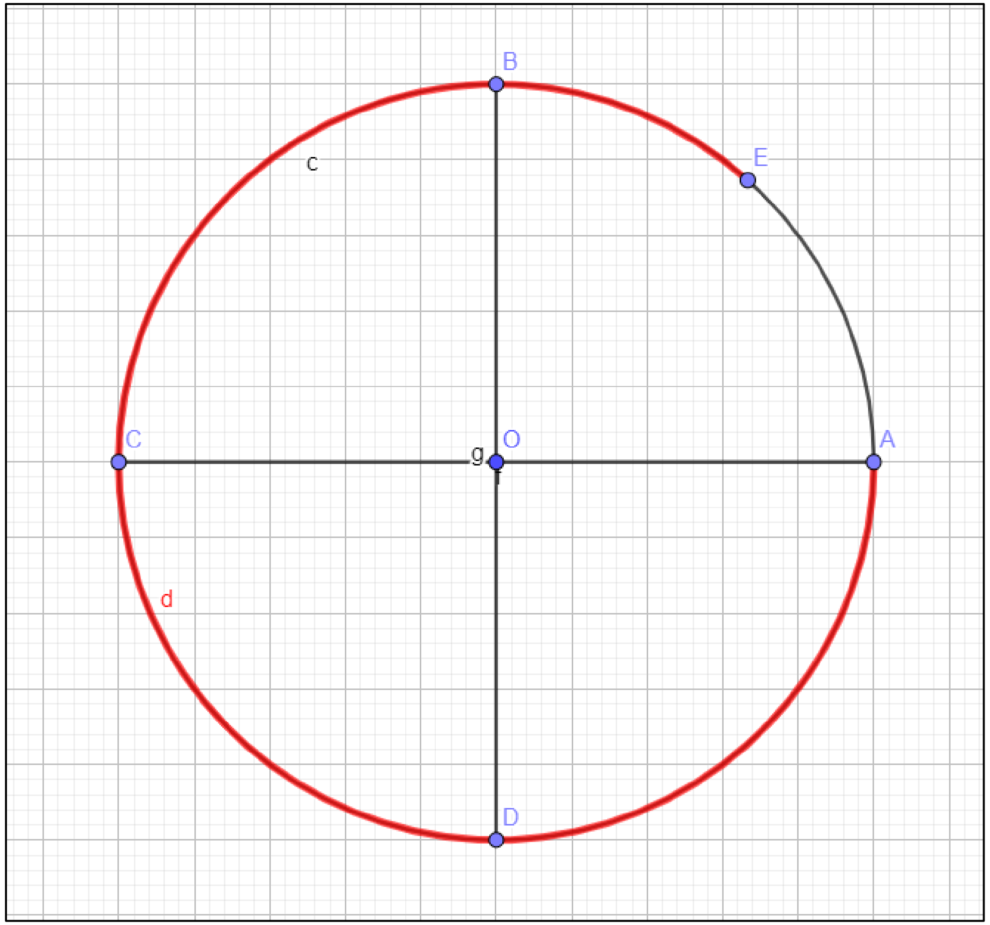
Выясните, какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая данному числу.

ИКТ **1.12.** в) -18;

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2$$
$$-18{,}9 < -3\cdot(2\pi) < -18{,}6$$
$$-13{,}95 < 3\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) < -14{,}4$$

$$-18{,}6 < -18 \Rightarrow -3\cdot(2\pi) < -18$$
$$-18 < -14{,}4 \Rightarrow -18 < 3\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

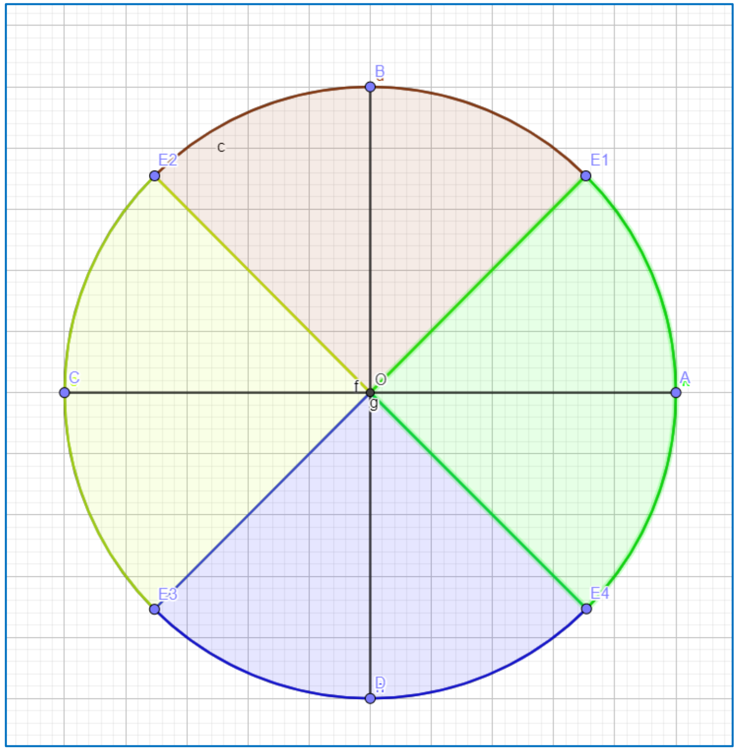
Точка, соответствующая числу -18, располагается на дуге AB



4. От «хорошей» точки к числу.

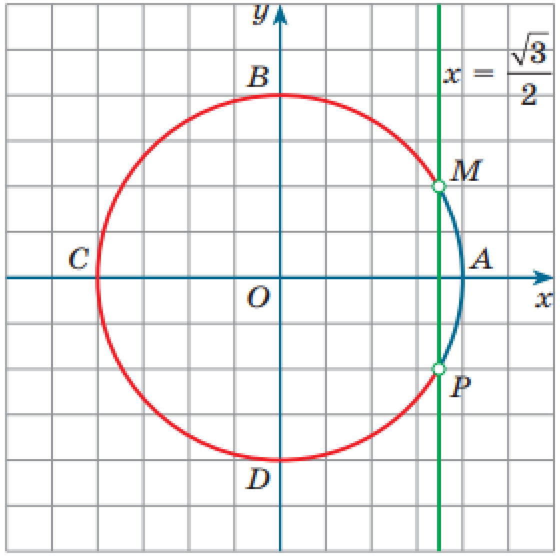
1.10. Запишите одной формулой все числа, которым на числовой окружности соответствуют данные точки:

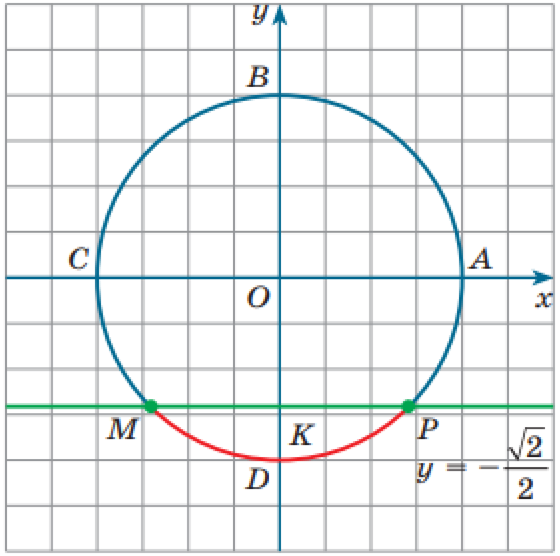
в) $E_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ и $E_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$;



Ответ. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$

5. От дуги к её аналитической записи





3.1. Изобразите на числовой окружности дугу:

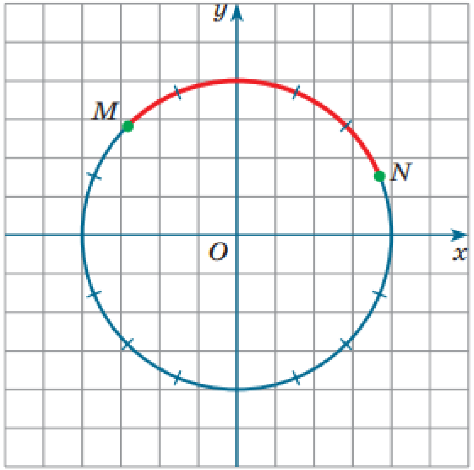
а) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; в) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$.

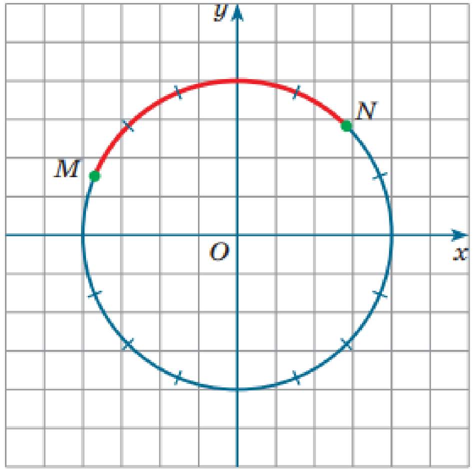
3.2. Точка P — середина первой четверти числовой окружности $ABCD$. Составьте аналитическую запись замкнутой дуги:

а) AP; б) PA; в) PC; г) DP.

3.7. Запишите с помощью двойного неравенства, каким числам t соответствует дуга NM числовой окружности, изображённая на указанном рисунке:

а) рис. 23; в) рис. 25; д) рис. 27;
б) рис. 24; г) рис. 26; е) рис. 28.





Числовая окружность на координатной плоскости – система дидактических заданий

1. Координаты «хороших» точек: $M\,(t) = M\,(x;\,y)$.

2. Знаки координат «плохих» точек.

3. Переход от декартовых координат к криволинейным.

1. Координаты «хороших» точек:

$$M(t) = M(x; y)$$

Для данной точки числовой окружности найдите декартовы координаты.

2.1. а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{2}$; д) $\frac{5\pi}{3}$; е) $\frac{7\pi}{6}$.

2.2. а) $-\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; в) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{2}$; е) $-\frac{5\pi}{6}$.

2.3. а) $\frac{17\pi}{6}$; б) $-\frac{33\pi}{4}$; в) $\frac{25\pi}{6}$; г) $-\frac{35\pi}{3}$.

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

2. Знаки координат «плохих» точек

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Укажите знаки абсциссы и ординаты данной точки числовой окружности.

ИКТ **2.10.** а) 24;

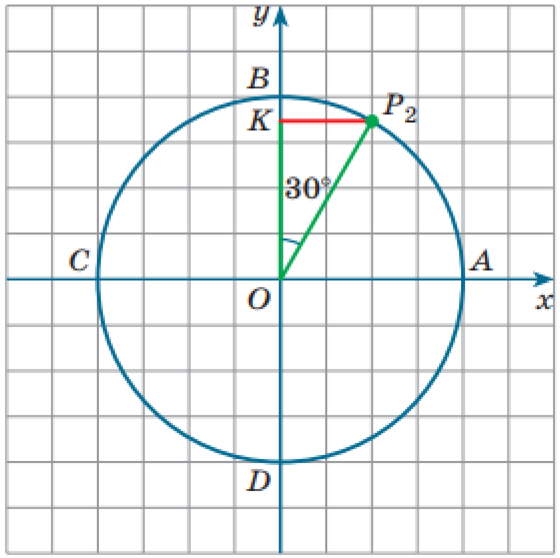
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$
$$23{,}55 < \frac{15\pi}{2} < 23{,}625$$

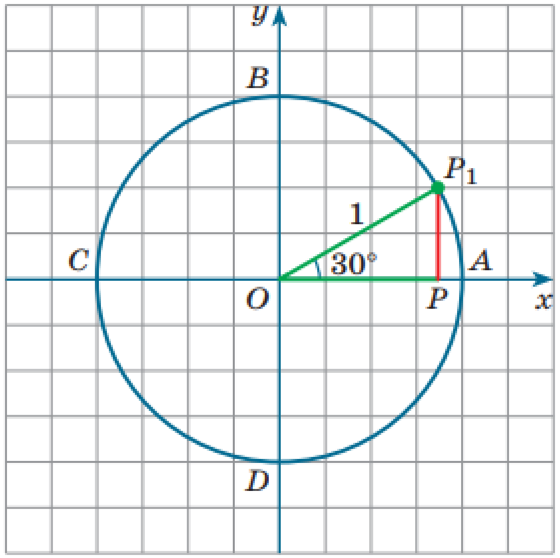
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$
$$24{,}96 < 8\pi < 25{,}12$$

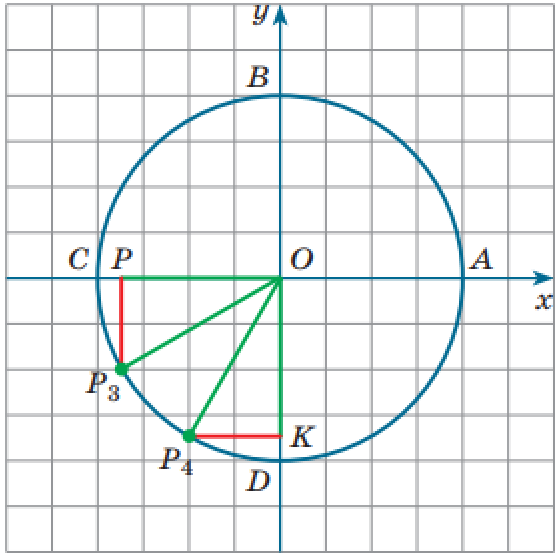
$$23{,}625 < 24 \Rightarrow \frac{15\pi}{2} > 24$$
$$8\pi < 24{,}96 \Rightarrow 24 < \frac{15\pi}{2}$$

Точка, соответствующая числу 24, располагается в IV четверти

3. Переход от декартовых координат к криволинейным







$PP_3 = \frac{1}{2}$. Но P_3 — точка третьей четверти, где $x < 0$, $y < 0$. Значит, $P_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. А для точки P_4 координаты изменят порядок: $P_4\left(\frac{4\pi}{3}\right) = P_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.4. Найдите наименьшее положительное число, которому на числовой окружности соответствует точка M с заданными координатами в декартовой системе координат:

а) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Обогащение математического языка

§ 4. Понятия косинуса и синуса числа

Определение. Если точка M числовой окружности на координатной плоскости xOy соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа** t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа** t и обозначают $\sin t$.
Итак (рис. 29),

если $M(t) = M(x;\ y)$, то
$x = \cos t,\ y = \sin t.$

Из определения косинуса и синуса сразу получается целый ряд важных соотношений.

1) Поскольку для абсциссы и ординаты любой точки числовой окружности выполняются неравенства $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то для любого числа t:

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

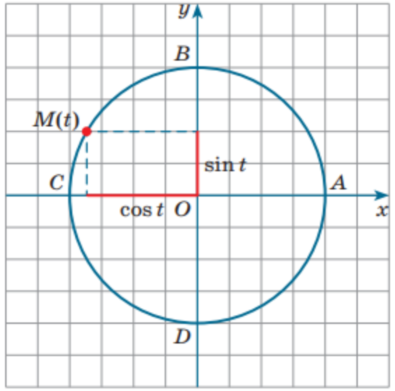


Рис. 29

2) Поскольку числам t, $t + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка числовой окружности, то:

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos t,$$
$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t.$$

3) Поскольку $x > 0$, $y > 0$ в первой четверти; $x < 0$, $y > 0$ во второй четверти; $x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти; $x > 0$, $y < 0$ в четвёртой четверти, то можно указать знаки косинуса и синуса по четвертям числовой окружности — они представлены на рисунке 30.

4) Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно оси абсцисс (рис. 31). У точек M и P одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У точек M и P равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты, а это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$. Итак, для любого числа t

$$\cos(-t) = \cos t,$$
$$\sin(-t) = -\sin t.$$

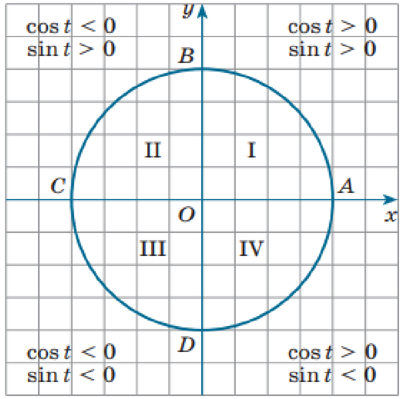


Рис. 30

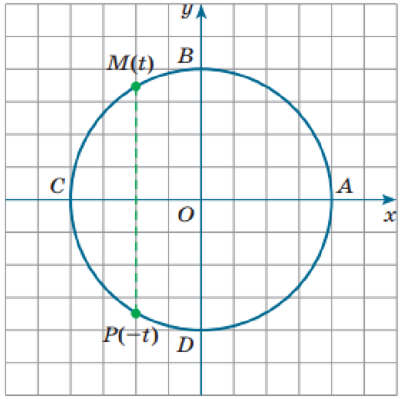


Рис. 31

5) В § 2 мы подробно обсудили, как вычислять координаты всех точек, отмеченных на макетах № 1 и № 2 (см. с. 10). Составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 1

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

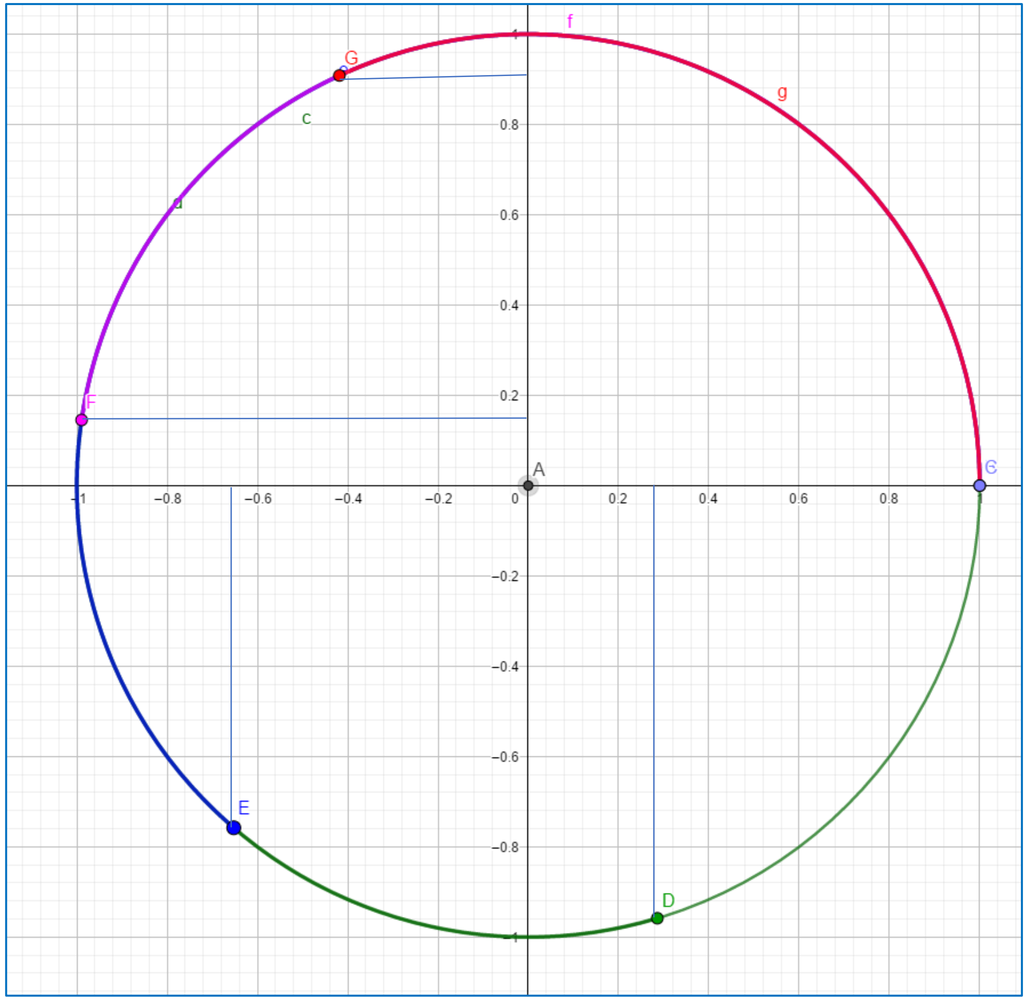
Таблица 2

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Обогащение математического языка

ИКТ 4.21. Расположите в порядке возрастания числа:

в) $\sin 2$; $\sin 3$; $\cos 4$; $\cos 5$;



Ответ.

$\cos 4$; $\sin 3$; $\cos 5$; $\sin 2$.

§ 15. Понятие обратной функции

§ 16. Функция $y = \arcsin x$

§ 17. Функция $y = \arccos x$

§ 18. Функция $y = \mathrm{arctg}\, x$

§ 19. Функция $y = \mathrm{arcctg}\, x$

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

§ 21. Решение уравнения $\sin x = a$

§ 22. Решение уравнений $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$

§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений

§ 24. Однородные тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

В § 4 мы уже решили некоторые уравнения вида $\cos t = a$. Так, в примере 3 из этого параграфа мы видели, что решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид $t = 2\pi n$, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид $t = \pi + 2\pi n$. А в примере 5 из § 4 мы для уравнения $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получили такой ответ: $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Напомним, что во всех упомянутых решениях подразумевается, что параметр n принимает любые целочисленные значения: $n \in Z$. В настоящем параграфе мы обсудим, как обстоит дело с решением уравнения $\cos t = a$ для произвольного значения a.

Если $|a| > 1$, то, поскольку $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$, уравнение $\cos t = a$ не имеет решений.

Если $|a| = 1$, т. е. $a = \pm 1$, то как решить соответствующие уравнения ($\cos t = 1$, $\cos t = -1$), мы уже напомнили выше.

Пусть $|a| < 1$. По определению $\cos t$ — это абсцисса той точки числовой окружности, которая соответствует числу t. На числовой окружности есть две точки — M и P, абсциссы которых равны a. Эти точки симметричны относительно оси абсцисс, а потому дуги AM и PA равны (рис. 134). Точка M соответствует числу $\arccos a$, а значит, и всем числам вида $\arccos a + 2\pi n$. Точка P соответствует *числу* $-\arccos a$, а значит, и всем числам вида $-\arccos a + 2\pi n$.

Итак,

> если $|a| < 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет следующие решения:
> $t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$.

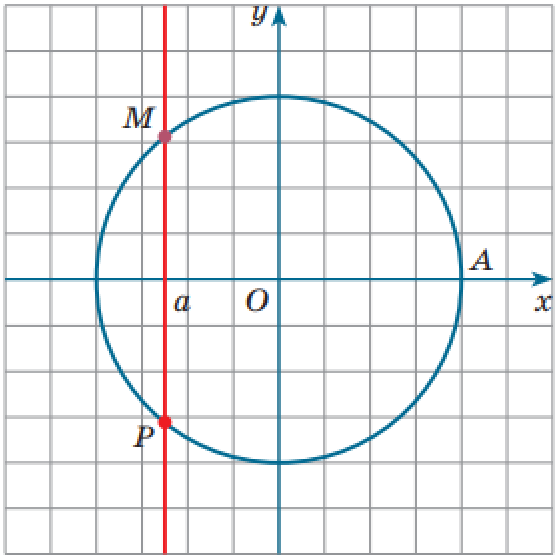


Рис. 134

Решение простейших тригонометрических уравнений

§ 21. Решение уравнения $\sin x = a$

В § 4 мы уже решили некоторые уравнения вида $\sin t = a$. Так, в примере 4 из этого параграфа мы видели, что решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид $t = \pi n$, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид

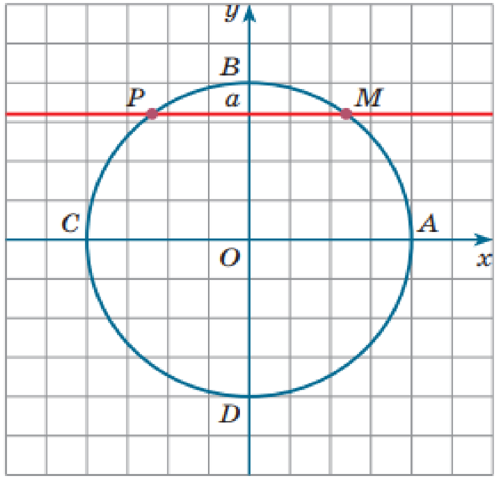


Рис. 135

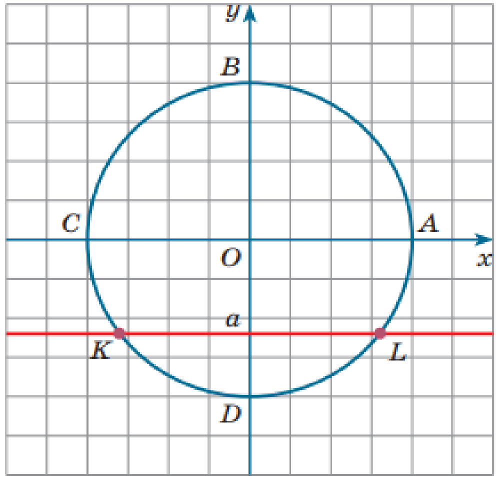


Рис. 136

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, решения уравнения $\sin t = -1$ имеют вид $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

А в примере 5 из § 4 мы для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ получили такой ответ:

$$t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n.$$

Поскольку $t_1 = \arcsin a$, то все решения уравнения $\sin t = a$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = a$, где $-1 < a < 0$. Имеем (рис. 136):

$$t = t_1 + 2\pi n, \quad t = t_2 + 2\pi n,$$

где t_1 — число, соответствующее точке L, а t_2 — число, соответствующее точке K.

Мы знаем (см. рис. 116, *б* на с. 144), что $t_1 = \arcsin a$. Заметим далее, что $AK = AC - CK = AC - LA = AC - AL = \pi - \arcsin a$. Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это даёт возможность записать все решения уравнения $\sin t = a$ при $0 < a < 1$ следующим образом:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Итак,

> **если $|a| < 1$, то уравнение $\sin t = a$ имеет две серии решений:**
> **$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$.**

Оказывается, эти две формулы можно объединить, т. е. записать одной формулой. Чтобы её получить, обратим внимание на два обстоятельства.

1) В формуле $x = \arcsin a + 2\pi k$ перед $\arcsin a$ стоит знак «+», а у числа π множителем является *чётное число* $2k$.

2) Если переписать формулу $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$ в виде $x = -\arcsin a + \pi(2k + 1)$, то обнаружим, что перед $\arcsin a$ стоит знак «−», а у числа π множителем является *нечётное число* $2k + 1$.

Эти оба обстоятельства будут учтены, если мы составим общую формулу для решения уравнения $\sin x = a$ в следующем виде:

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z.}$$

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

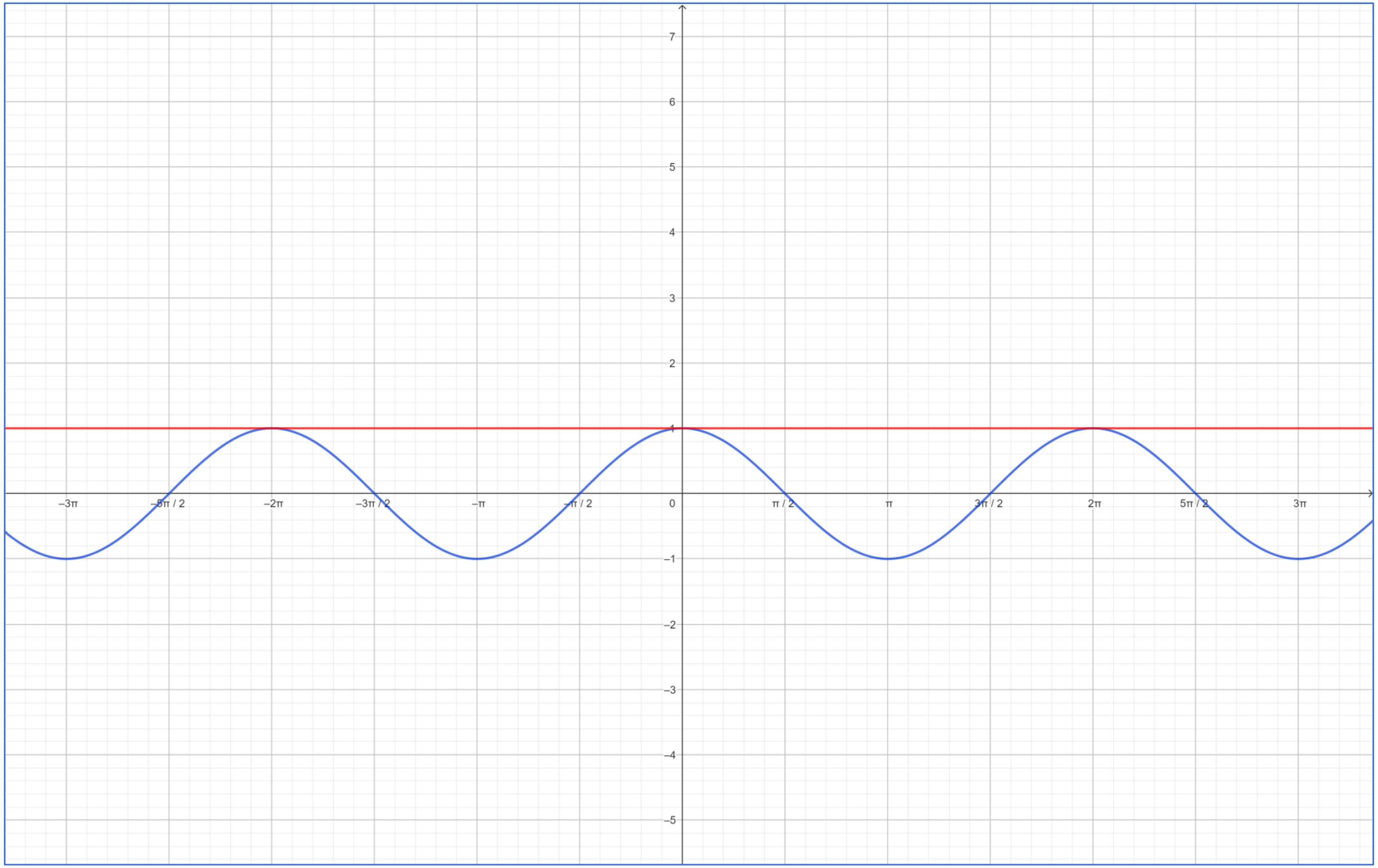
ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

а) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 4p - 3$$

Используем инструмент «ползунок»: $p = 1$



ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

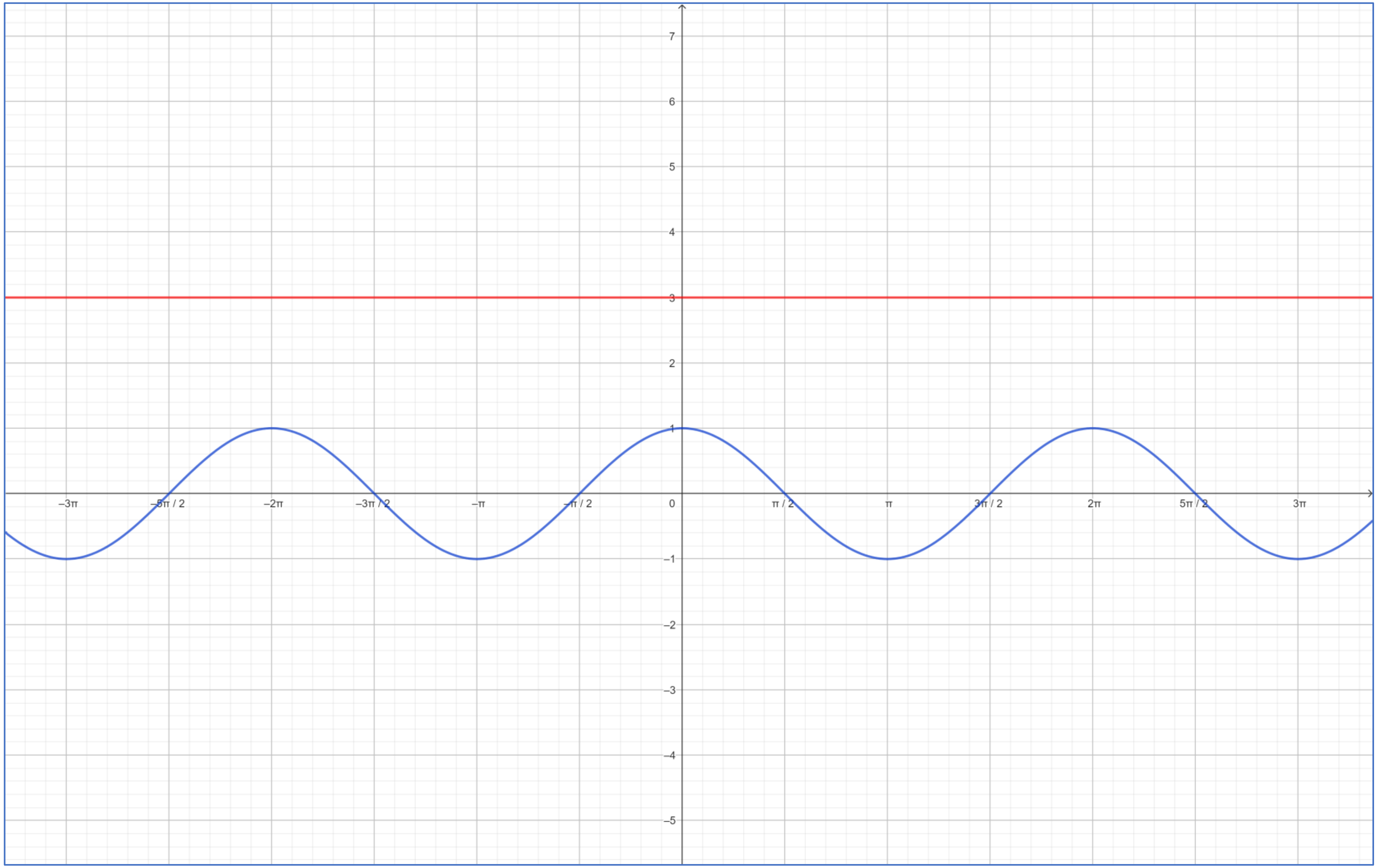
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

а) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 4p - 3$$

Увеличим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 1,5



§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

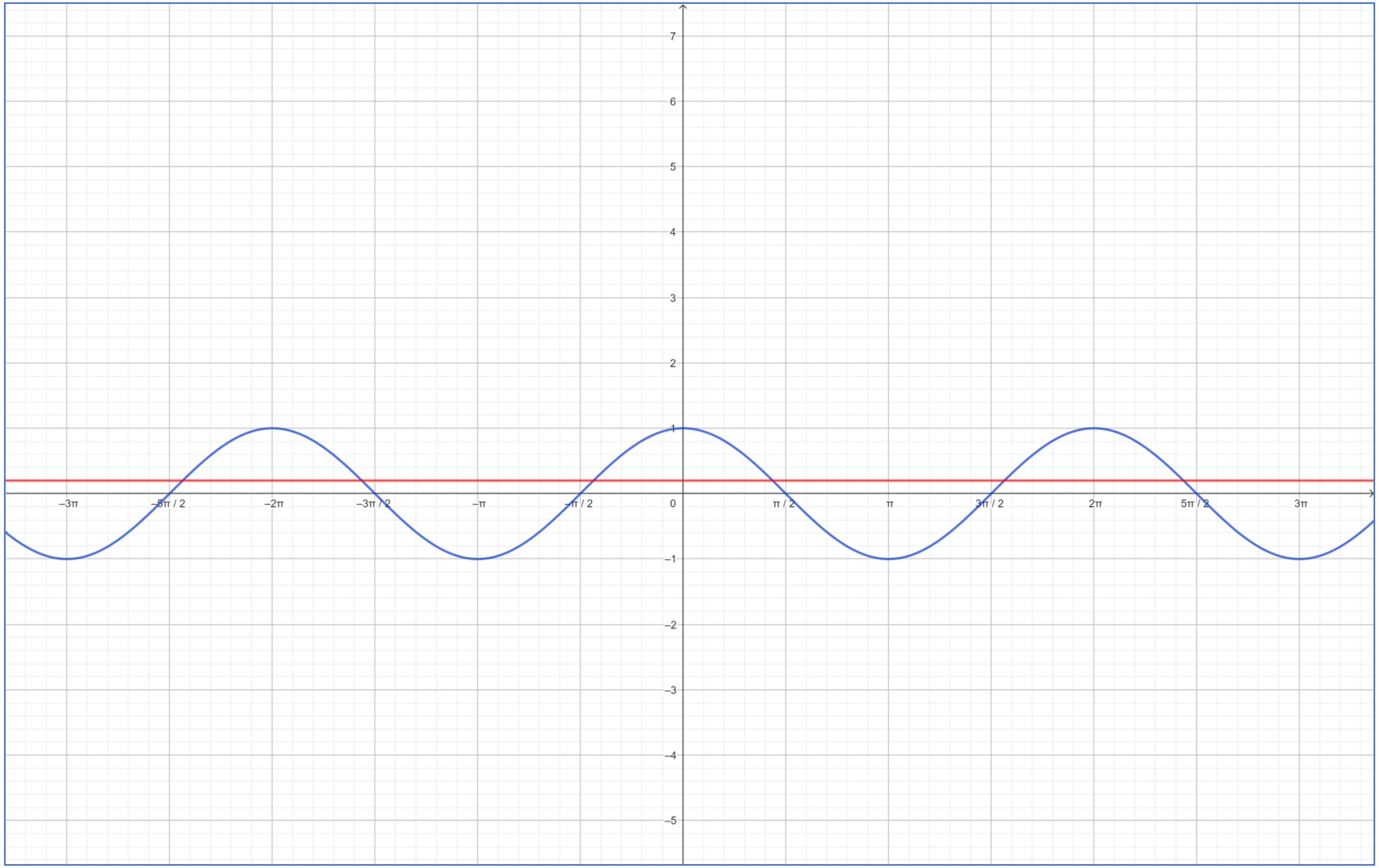
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

а) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 4p - 3$$

Уменьшим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 0,8



ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

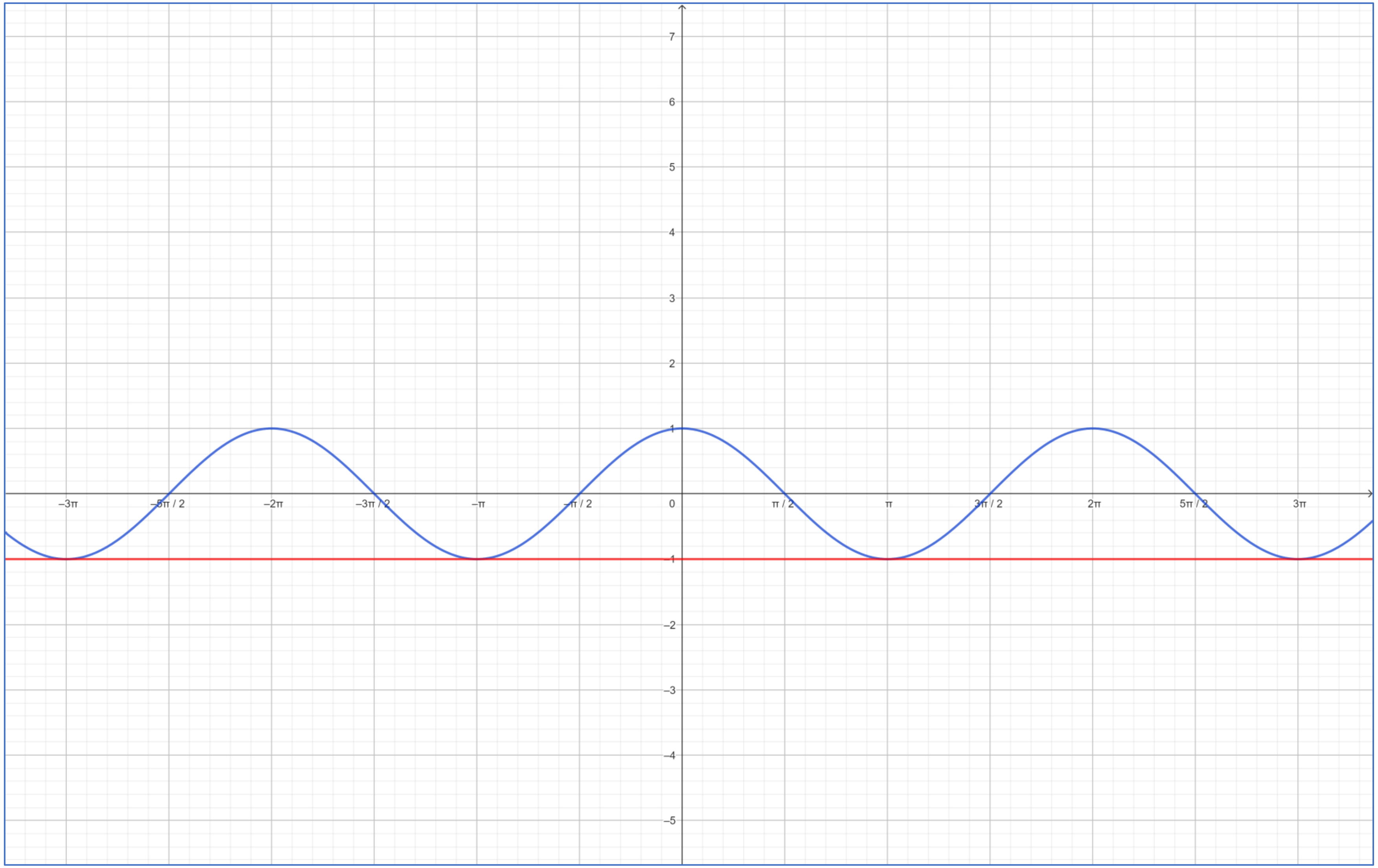
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

а) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 4p - 3$$

Уменьшим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 0,5



§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

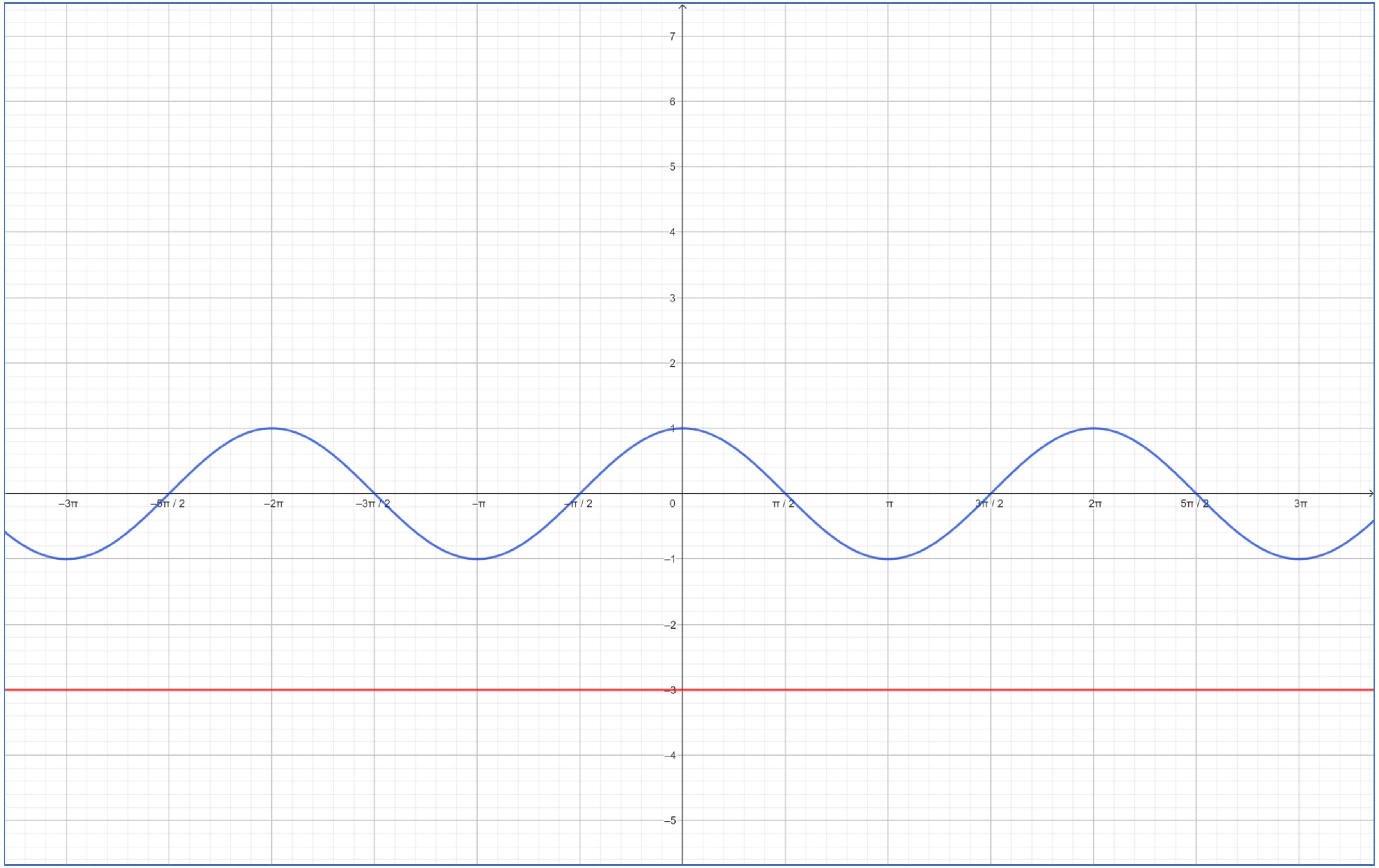
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

а) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 4p - 3$$

Уменьшим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 0



Установление соответствия между разными методами решения

ИКТ **20.8.** Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

Аналитическое решение	Геометрическая интерпретация
Учитывая область значений функции $y = \cos x$: $\lvert 4p-3\rvert \le 1$ $-1 \le 4p-3 \le 1$ $2 \le 4p \le 4$ $0{,}5 \le p \le 1$	При $0{,}5 \le p \le 1$ графики функций $y = \cos x$ и $y = 4p-3$ пересекаются. Уравнение имеет корни.
$\lvert 4p-3\rvert > 1$ $\left[\begin{array}{l} 4p-3>1, \\ 4p-3<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p>1, \\ p<0{,}5. \end{array}\right.$	При $p<0{,}5$ и $p>1$ графики функций $y = \cos x$ и $y = 4p-3$ не пересекаются. Уравнение не имеет корней.

Ответ. При $0{,}5 \le p \le 1{,}5.$

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

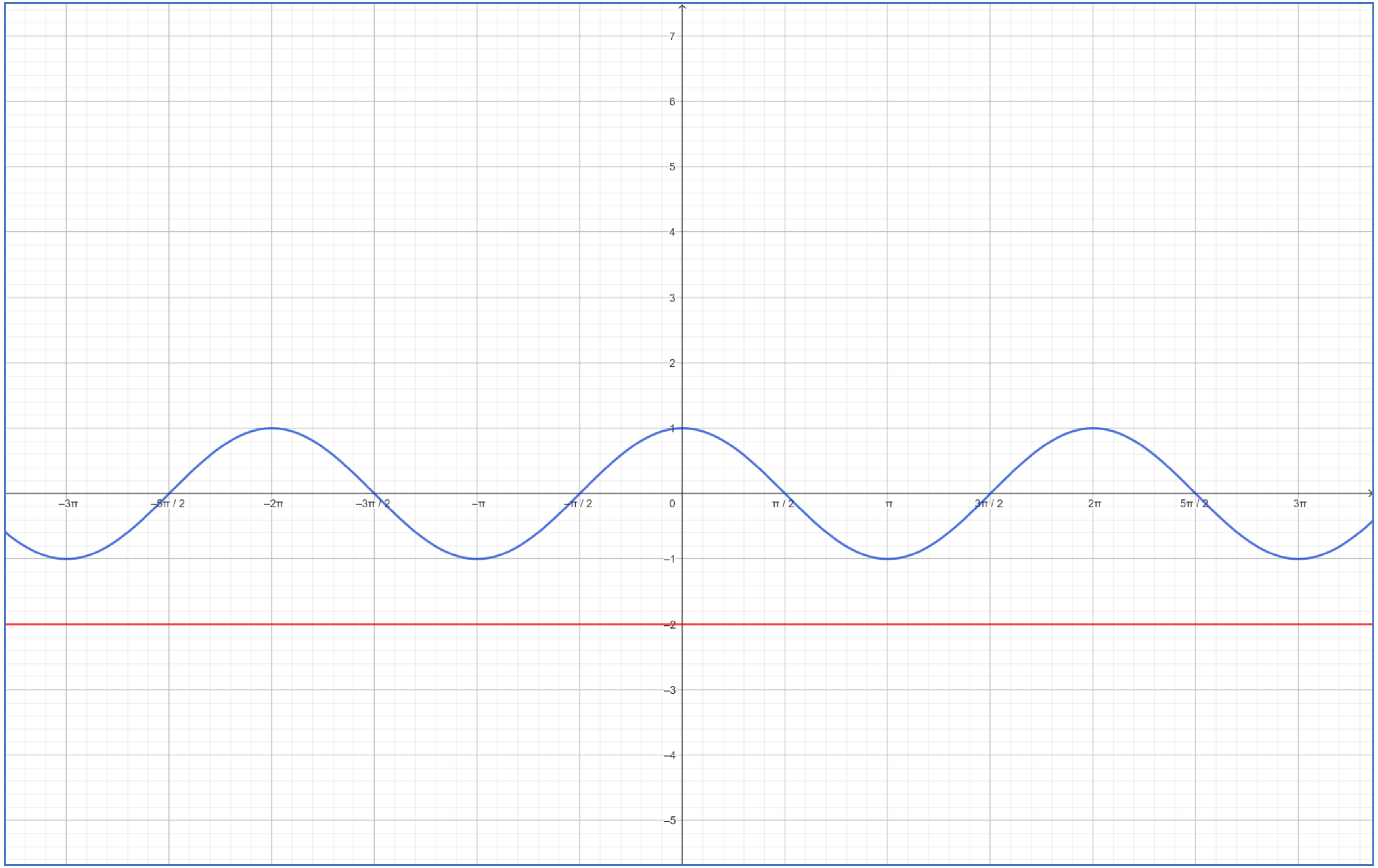
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$$

Используем инструмент «ползунок»: $p = 1$



§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

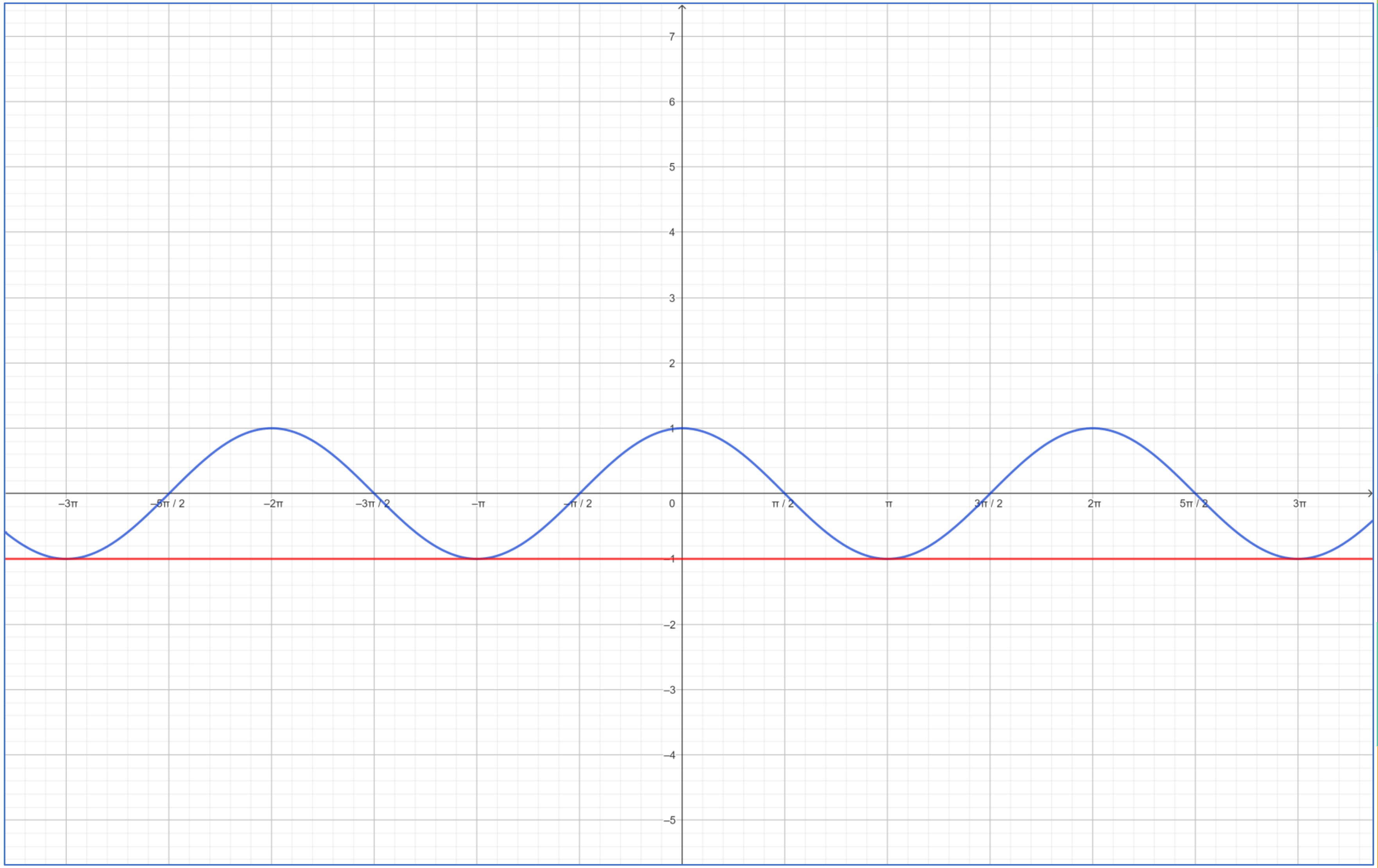
ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$

Уменьшим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 0,5



ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

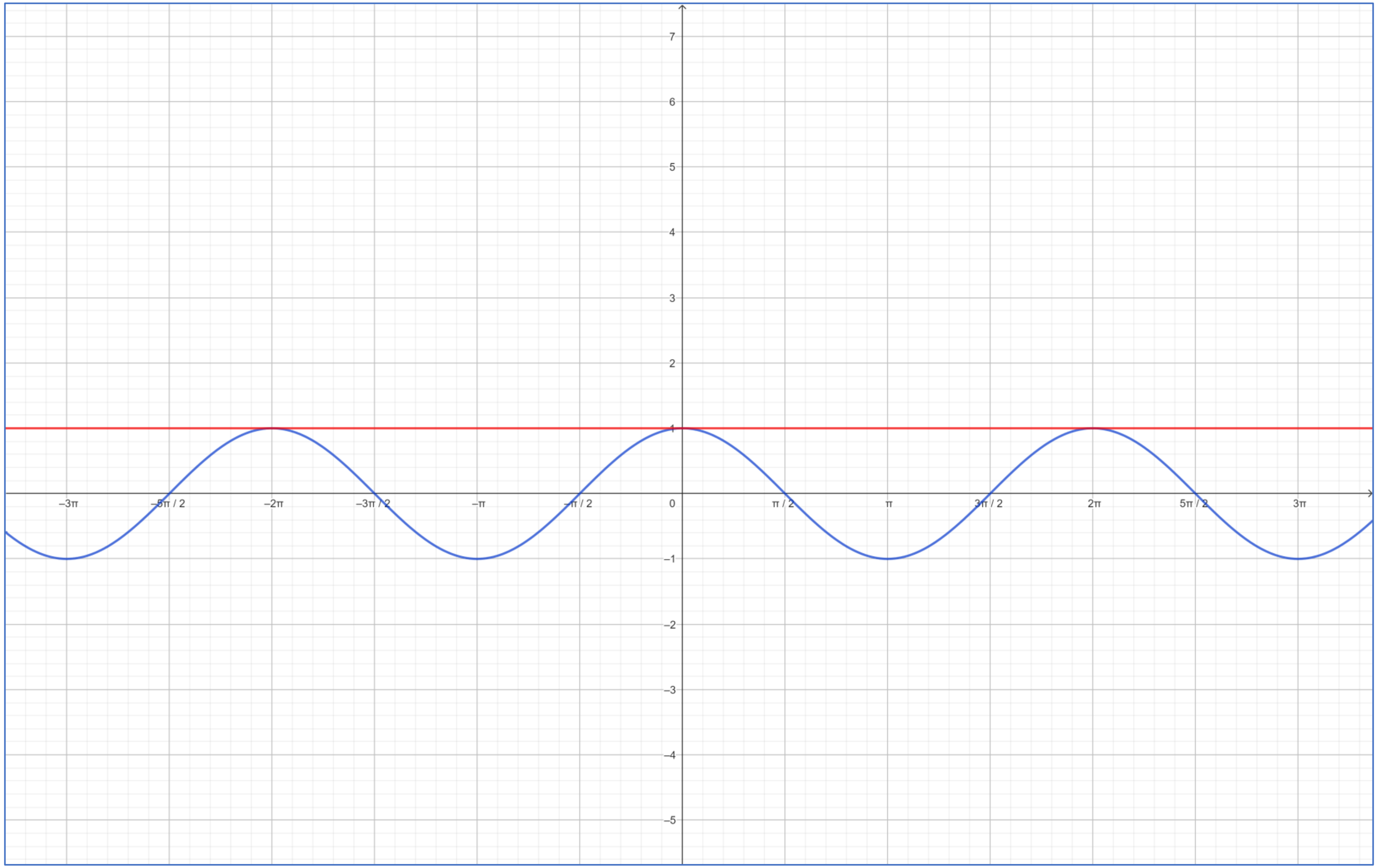
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$

Уменьшим значение параметра с помощью «ползунка»: $p = 0$



§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

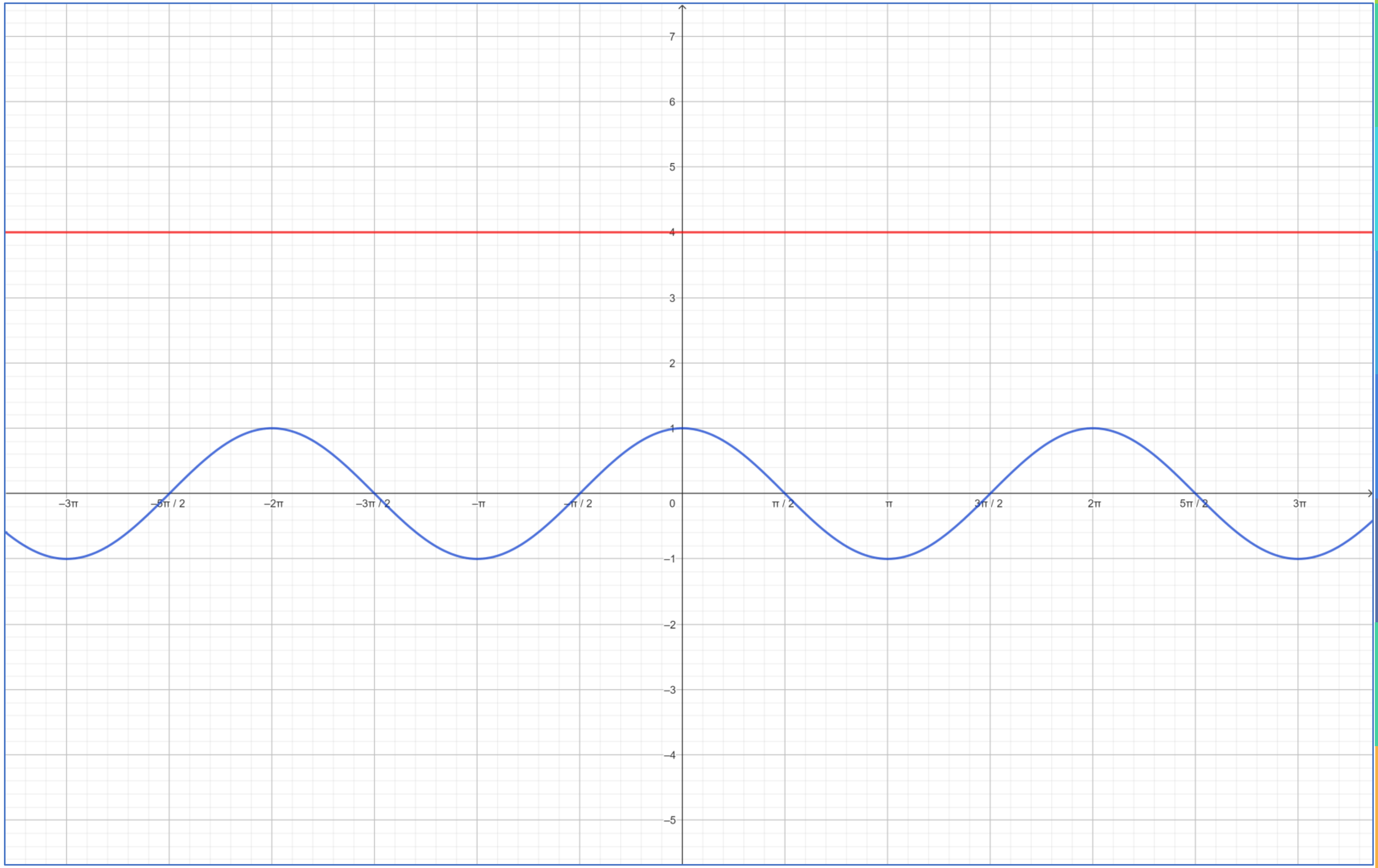
ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$$

Уменьшим значение параметра с помощью «ползунка»: $p = 0{,}5$



ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

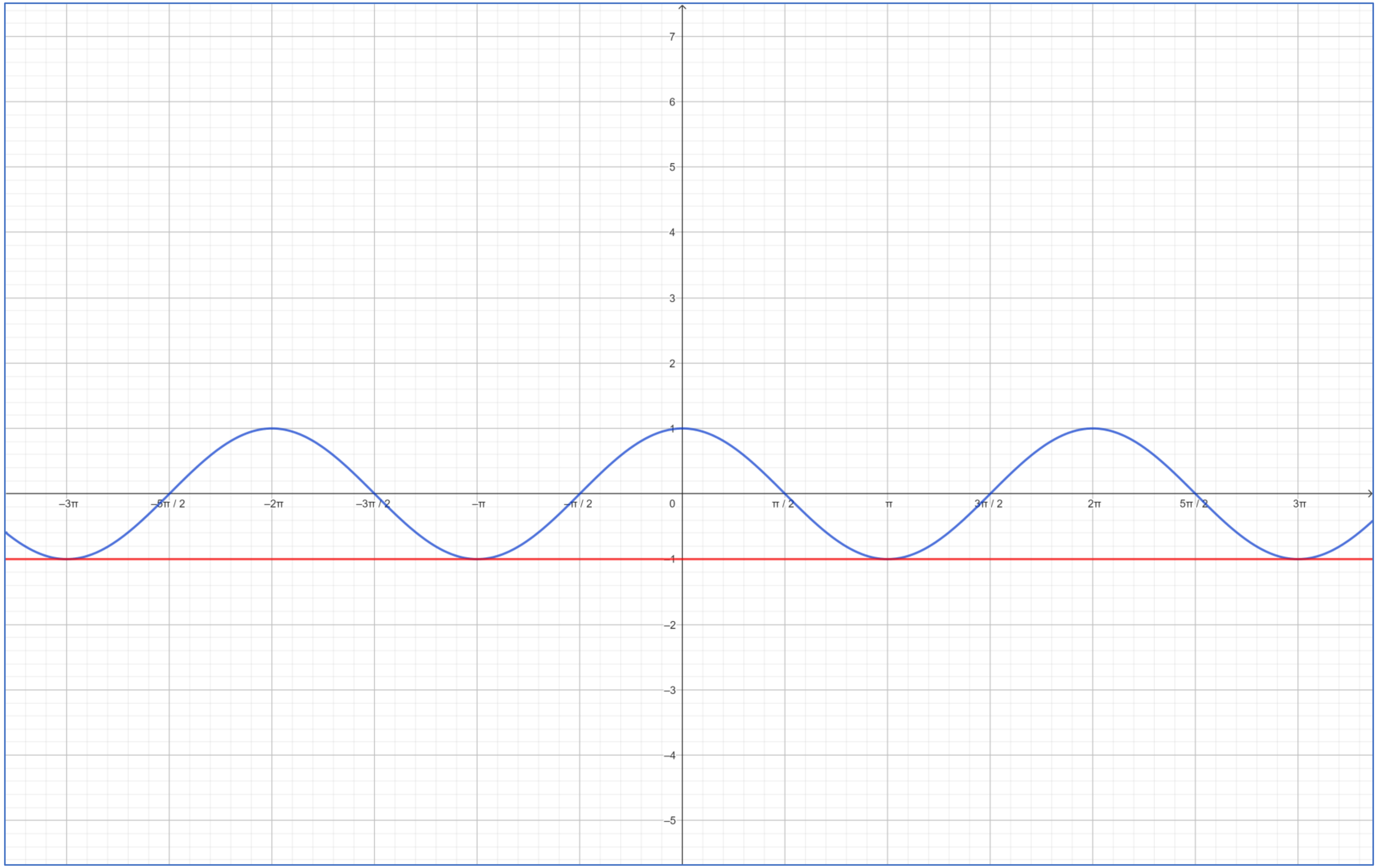
а) $\cos x = 4p - 3$;   б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$$

Увеличим значение параметра с помощью «ползунка»: $p = 2$



ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

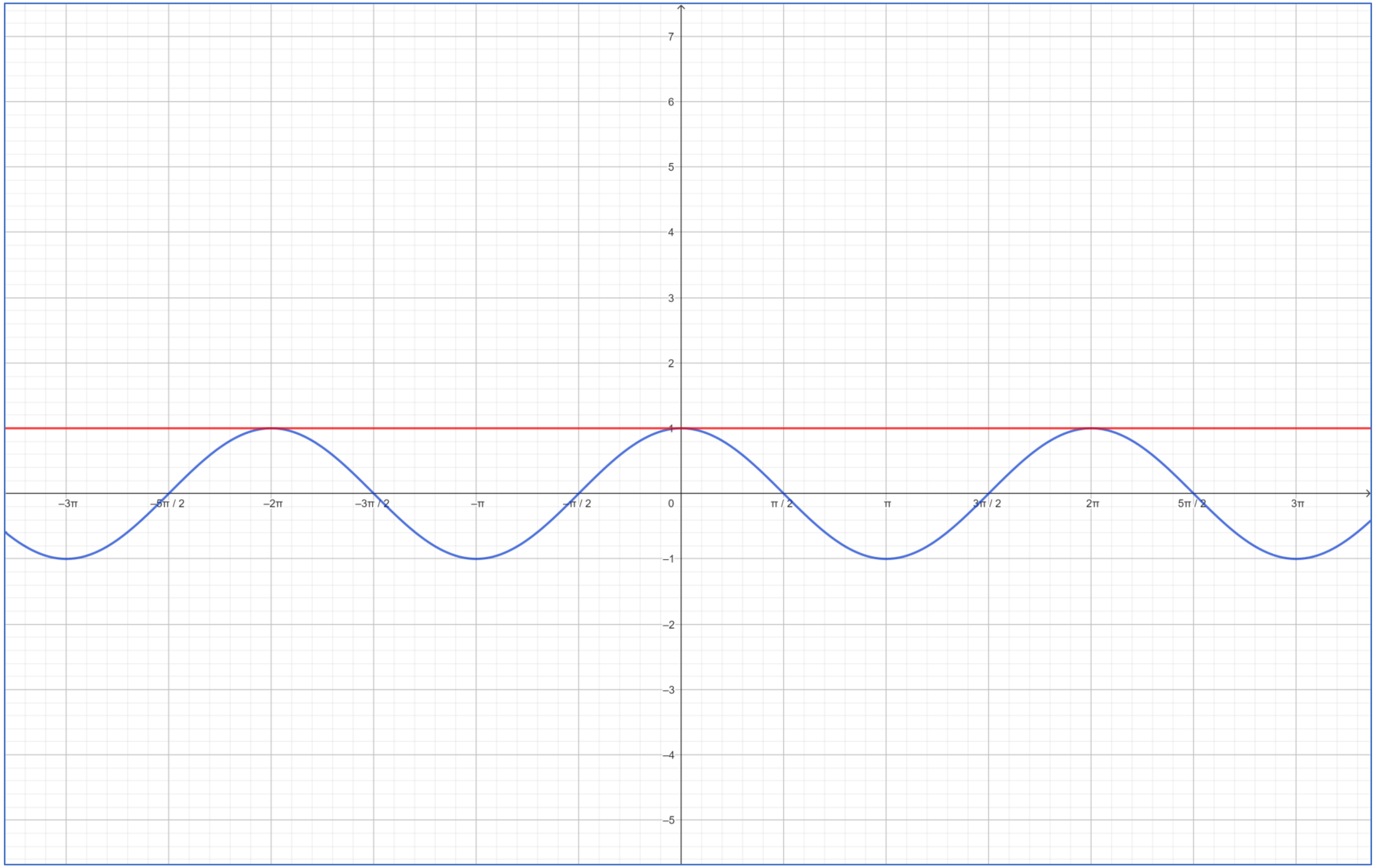
а) $\cos x = 4p - 3$;   б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$$

Увеличим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 2,5



§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

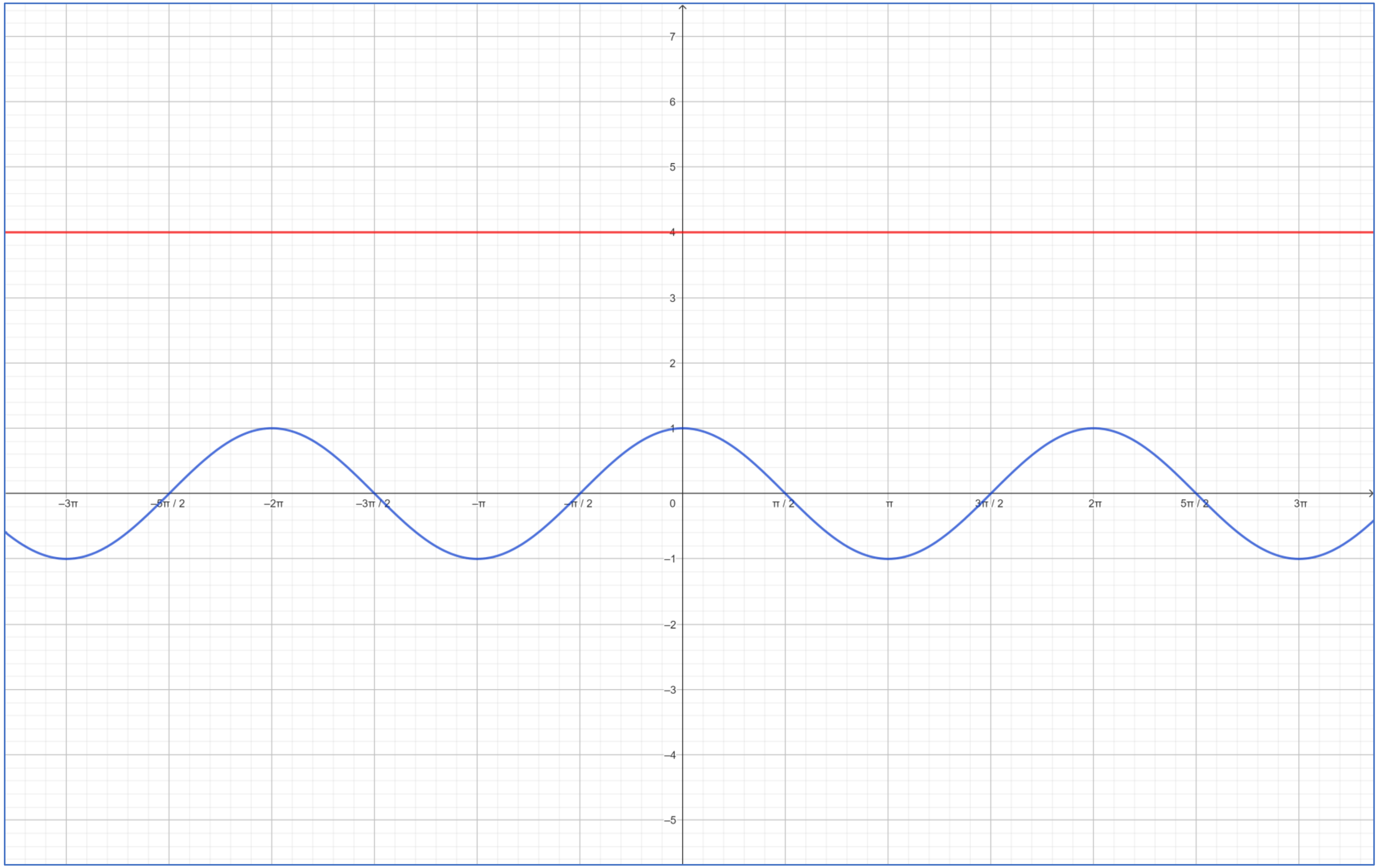
ИКТ 20.8. Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

б) Решение:

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \cos x, \quad y = 2p^2 - 5p + 1$$

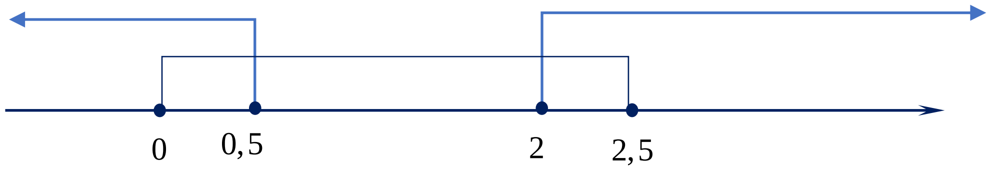
Увеличим значение параметра с помощью «ползунка»: p = 3



Установление соответствия между разными методами решения

ИКТ **20.8.** Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:
а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

Аналитическое решение	Геометрическая интерпретация
Учитывая область значений функции $y = \cos x$: $\lvert 2p^2 - 5p + 1 \rvert \le 1$ $\begin{cases} 2p^2 - 5p + 1 \le 1, \\ 2p^2 - 5p + 1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2 - 5p \le 0, \\ 2p^2 - 5p + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le p \le 2{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} p \le 0{,}5, \\ p \ge 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le p \le 0{,}5, \\ 2 \le p \le 2{,}5. \end{array} \right.$	При $0 \le p \le 0{,}5$; $2 \le p \le 2{,}5$ графики функций $y = \cos x$ и $y = 2p^2 - 5p + 1$ пересекаются. Уравнение имеет корни.

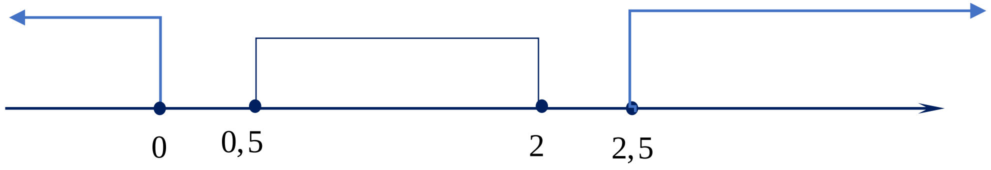


Установление соответствия между разными методами решения

ИКТ **20.8.** Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

Аналитическое решение	Геометрическая интерпретация
$\lvert 2p^2-5p+1\rvert > 1$ $\left[\begin{array}{l} 2p^2-5p+1>1, \\ 2p^2-5p+1<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2p^2-5p>0, \\ 2p^2-5p+2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p>0, \\ p>2{,}5, \\ 0{,}5<p<2. \end{array}\right.$	При $p<0,\ 0{,}5<p<2,\ p>2{,}5$ графики функций $y=\cos x$ и $y=2p^2-5p+1$ не пересекаются. Уравнение не имеет корней.



Ответ. При $0 \le p \le 0{,}5;\ 2 \le p \le 2{,}5.$

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

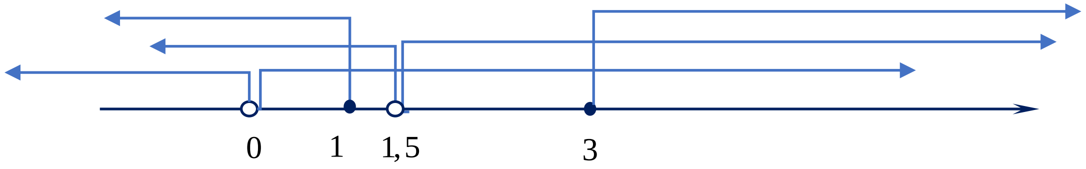
20.13. Решите уравнение с параметром a:

а) $\dfrac{2a\cos x}{3\cos x - a} = 1;$

$$\frac{2a\cos x}{3\cos x - a} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(2a-3)\cos x + a}{3\cos x - a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-3)\cos x + a = 0, \\ 3\cos x - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\dfrac{a}{2a-3}, \\ \cos x \neq \dfrac{a}{3}. \end{cases}$$

Решение есть, если выполняются условия: $\begin{cases} -1 \le -\dfrac{a}{2a-3} \le 1, \\ -\dfrac{a}{2a-3} \neq \dfrac{a}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{a}{2a-3} \le 1, \\ -\dfrac{a}{2a-3} \ge -1, \end{array}\right. \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{a-1}{2a-3} \ge 0, \\ \dfrac{a-3}{2a-3} \ge 0, \end{array}\right. \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0, \\ 0 < a \le 1, \\ a \ge 3. \end{array}\right.$$



Корни уравнения: $x = \pm\arccos\dfrac{a}{3-2a} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ. При $a < 0,\ 0 < a \le 1,\ a \ge 3$: $x = \pm\arccos\dfrac{a}{3-2a} + 2\pi k,\ k \in Z.$

при других a корней нет.

25.8. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

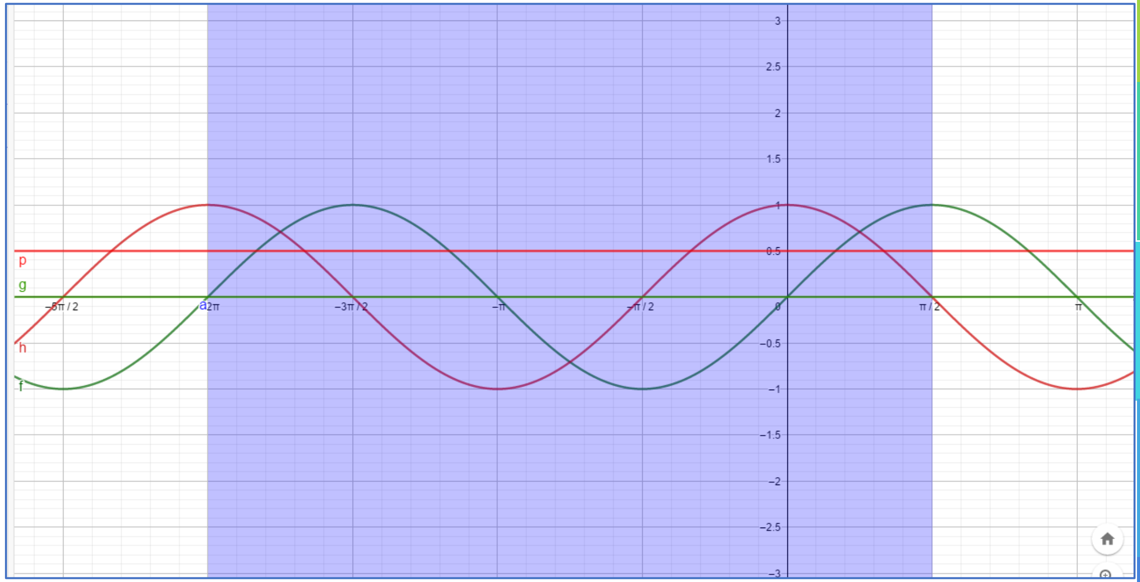
Решение:

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0,$$

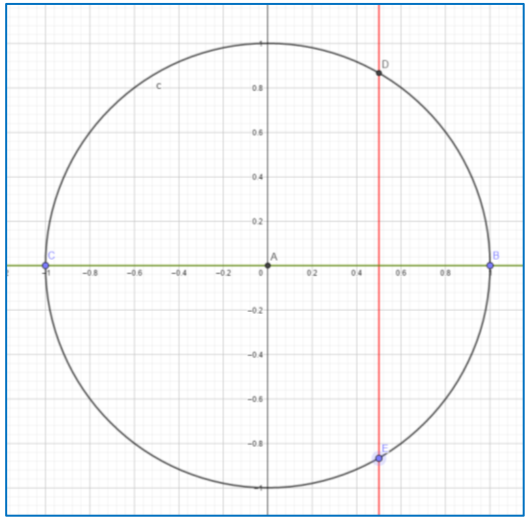
$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi k, \quad k \in Z \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$



Отбор корней.

$$x = \pi k, \quad k \in Z \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \qquad x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$$



$$-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -2\pi, -\pi, 0$$

25.8. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

Отбор корней.

$$x = \pi k, \quad k \in Z$$
$$-2\pi \le \pi k \le \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$
$$-2 \le k \le \frac{1}{2}, \quad k \in Z$$
$$k = -2, -1, 0$$
$$x = -2\pi, -\pi, 0$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$
$$-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z$$
$$-\frac{7}{3} \le 2\pi n \le \frac{\pi}{6}, \quad n \in Z$$
$$-\frac{7}{6} \le n \le \frac{\pi}{12}, \quad n \in Z$$
$$n = -1, 0, \quad x = -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$
$$-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z$$
$$-\frac{5\pi}{3} \le 2\pi n \le \frac{5\pi}{6}, \quad n \in Z$$
$$-\frac{5}{6} \le n \le \frac{5\pi}{12}, \quad n \in Z$$
$$n = 0, \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

Ответ. а) $\pi k, k \in Z; \quad \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

б) $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -2\pi, -\pi, 0$

§ 25. Формулы приведения

§ 26. Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов

§ 27. Формулы тангенса суммы и разности аргументов

§ 28. Формулы двойного аргумента

§ 29. Формулы понижения степени

§ 30. Формулы сложения (вычитания) косинусов (синусов)

§ 31*. Формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму

Теорема сложения (синус суммы, косинус суммы)

Приложение* к § 26
Доказательство теоремы сложения

Поскольку в доказательстве используется модель «числовая окружность на координатной плоскости xOy», нам будет удобнее в формулах вместо x, y писать α, β.

Докажем формулу «косинус разности»:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Ради наглядности, ограничимся случаем, когда

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Отметим на числовой окружности, расположенной в координатной плоскости, точки $A(\alpha)$ и $B(\beta)$. Декартовы координаты этих точек таковы (рис. 138):

$$A(\alpha) = A(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$
$$B(\beta) = B(\cos\beta,\ \sin\beta).$$

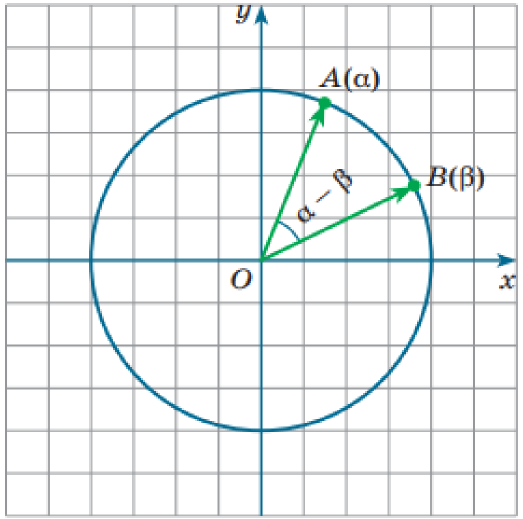


Рис. 138

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. По определению скалярного произведения векторов (скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними) имеем: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\angle AOB$. Так как радиус числовой окружности равен 1, то $|\overrightarrow{OA}| = 1$ и $|\overrightarrow{OB}| = 1$. Центральный угол AOB равен $(\alpha - \beta)$. Значит,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\alpha - \beta). \qquad (1)$$

С другой стороны, так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют начало в точке $(0;\ 0)$, то их координаты совпадают с координатами точек A и B, т. е. имеем: $\overrightarrow{OA}$ $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OB}$ $(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Тогда по свойству скалярного произведения векторов (скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат) выполняется равенство:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Таким образом, из равенств (1) и (2) получаем формулу «косинус разности»:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорема сложения (синус суммы, косинус суммы)

Для вывода формулы «косинус суммы» воспользуемся свойствами нечётности синуса и чётности косинуса: $\sin(-t) = -\sin t$; $\cos(-t) = \cos t$.

Имеем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вывода формулы «синус суммы» воспользуемся формулами приведения: $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ и уже доказанной формулой косинуса разности двух аргументов.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Итак, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Осталось получить формулу «синус разности», при этом будем использовать уже доказанную формулу «синус суммы»:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \\ = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

§ 26. Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов

26.21. При каких целочисленных значениях параметра a имеет решение уравнение:

а) $5\sin x + 2\cos x = a - 1$;

$5^2 + 2^2 = 29$ значит, справедливо равенство: $\left(\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{29}$: $\dfrac{5}{\sqrt{29}}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{29}}\cos x = \dfrac{a-1}{\sqrt{29}}$

Введём замену $\cos t = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$, тогда $\sin t = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, где $t = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Получаем $\cos t \sin x + \sin t \cos x = \dfrac{a-1}{\sqrt{29}}$, и далее по формуле синуса суммы $\sin(x+t) = \dfrac{a-1}{\sqrt{29}}$.

Уравнение имеет решения, если $-1 \le \dfrac{a-1}{\sqrt{29}} \le 1$, отсюда $1-\sqrt{29} \le a \le 1+\sqrt{29}$

Оценка параметра: $5 < \sqrt{29} < 6 \Leftrightarrow -6 < -\sqrt{29} < -5 \Leftrightarrow -5 < 1-\sqrt{29} < -4$

$$5 < \sqrt{29} < 6 \Leftrightarrow 6 < 1+\sqrt{29} < 7$$

Промежутку удовлетворяют целочисленные значения: $-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6.$

Ответ. $-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6.$

§ 30. Формулы сложения (вычитания) косинусов (синусов)

Для каждого действительного a найдите все действительные решения уравнения
$$\sin x+\cos(a+x)+\cos(a-x)=2.$$

Преобразуем по формуле суммы косинусов $\sin x+2\cos\frac{a+x+a-x}{2}\cos\frac{a+x-a+x}{2}=2 \Leftrightarrow \sin x+2\cos a\cos x=2$

$1^2+(2\cos a)^2=1+4\cos^2 a$ значит, справедливо равенство: $\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\right)^2+\left(\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\right)^2=1$

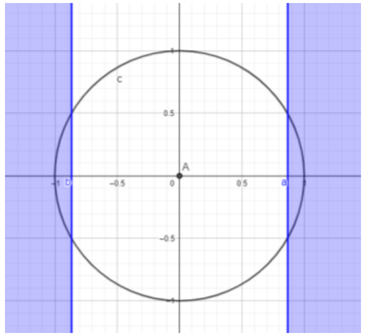
Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1+4\cos^2 a}$: $\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\cos x=2$

Введём замену $\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, тогда $\sin t=\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, где $t=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$ или $\operatorname{tg} t=2\cos a.$

Получаем $\cos t\sin x+\sin t\cos x=\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, и далее по формуле синуса суммы $\sin(x+t)=\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$

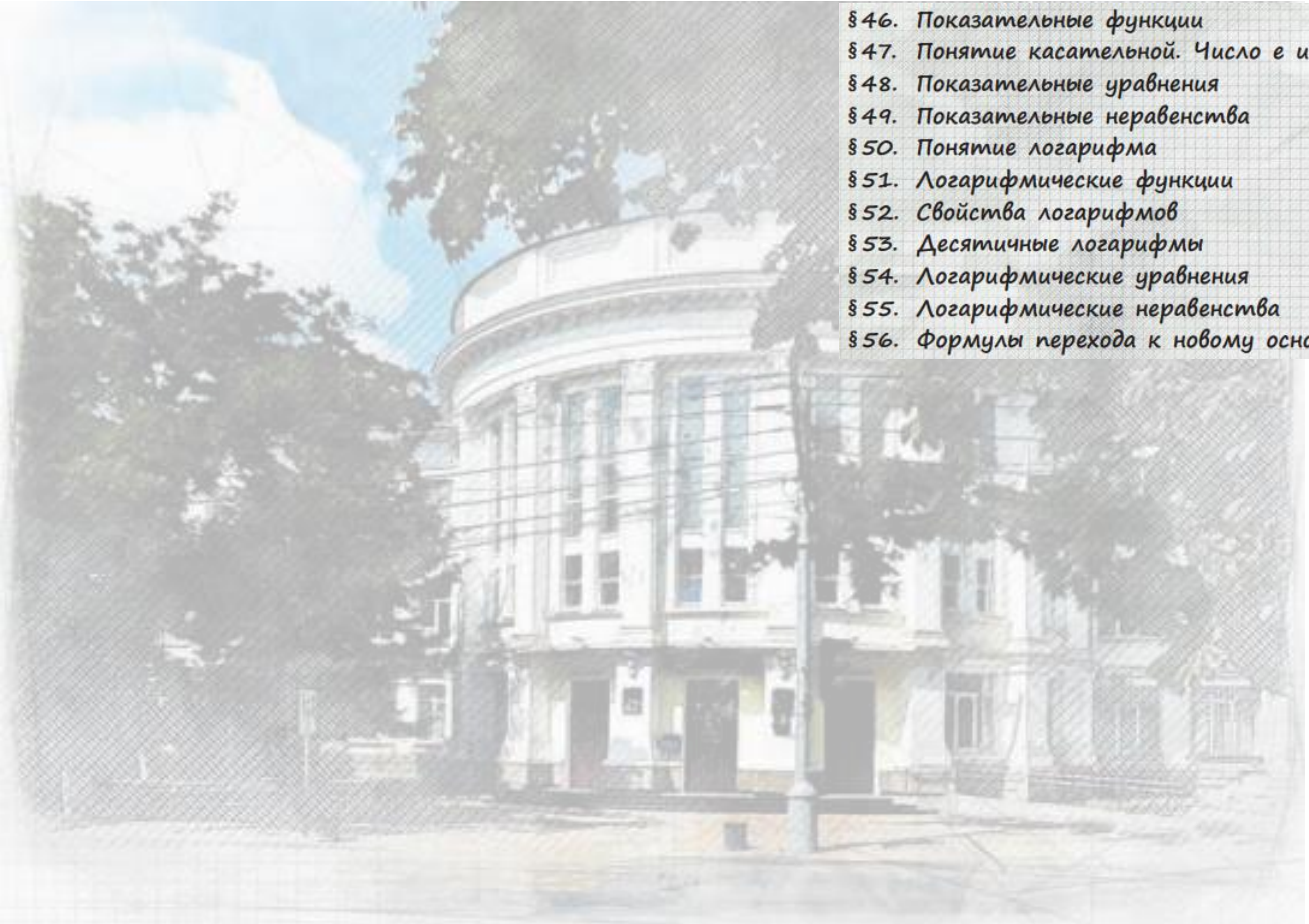
Уравнение имеет решения $x=-t+(-1)^k\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi k,\ k\in Z,$ где $t=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$

$$\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\le 1\Leftrightarrow\sqrt{1+4\cos^2 a}\ge 2\Leftrightarrow\left(2\cos a-\sqrt{3}\right)\left(2\cos a+\sqrt{3}\right)\ge 0$$



Ответ. При $-\frac{\pi}{6}+\pi k\le a\le\frac{\pi}{6}+\pi k$: $x=-t+(-1)^k\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi k,\ k\in Z,$ $t=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$

при других a корней нет.



§46. Показательные функции

§47. Понятие касательной. Число е и функция $y = e^x$

§48. Показательные уравнения

§49. Показательные неравенства

§50. Понятие логарифма

§51. Логарифмические функции

§52. Свойства логарифмов

§53. Десятичные логарифмы

§54. Логарифмические уравнения

§55. Логарифмические неравенства

§56. Формулы перехода к новому основанию логарифма

Глава 6

Показательные и логарифмические функции

§ 46. Показательные функции

В предыдущей главе мы узнали, что такое a^x, где основание a — положительное число, а показатель степени — любое действительное число. Значит, можно говорить и о функции $y = a^x$, определённой на множестве всех действительных чисел. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют *показательной функцией*. Случай, когда $a = 1$, исключают, поскольку для любого показателя x выполняется равенство $1^x = 1$ и получается постоянная функция $y = 1$.

Показательные функции часто встречаются в реальных ситуациях. Например, формулы, связанные с показательной функцией, используются в качестве основных:

— в банковском деле при непрерывном начислении сложных процентов;

— в физике при исследовании законов радиоактивного распада вещества;

— в биологии при оценке роста численности популяции живых организмов;

— в IT-индустрии при планировании роста числа подписчиков успешной социальной сети.

Распространённость показательных функций связана с тем, что ими описывают процессы, в которых скорость изменения величины прямо пропорциональна значению величины.

Построим график показательной функции с основанием больше 1. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = 2^x$, составим таблицу значений для этой функции:

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

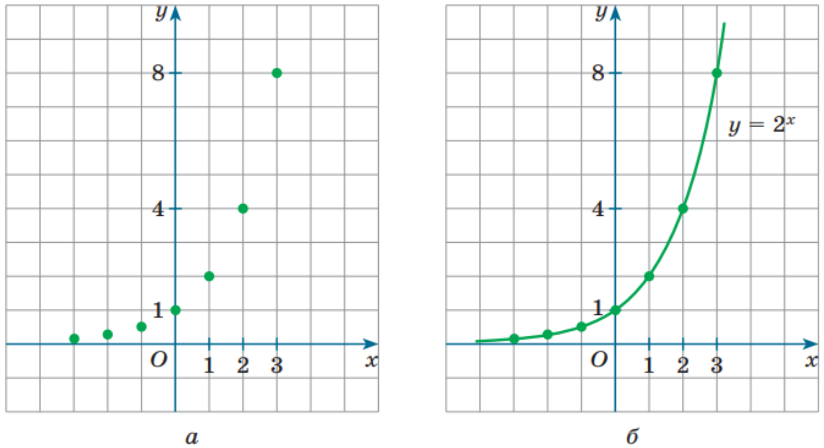


Рис. 170

Построим точки $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 4)$, $(3; 8)$, $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 170, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 170, *б*).

Подобный вид имеет график любой показательной функции $y = a^x$, где $a > 1$.

Показательные и логарифмические функции

§ 46. Показательные функции

Решите уравнение.

46.13. а) $3^x = 4 - x$; г) $5^x = 35 - 5x$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 3x + 31$; д) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = x + 8$;

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{x + 51}{9}$; е) $\left(\frac{11}{3}\right)^x = \frac{13 - 2x}{3}$.

ИКТ **46.14.** а) $2^x = \sqrt{x} + 1$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 = \sqrt{x}$;

б) $0{,}2^x = -\frac{5}{x}$; д) $3^x = \frac{3}{x}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; е) $7^x = 9 - 2x$.

46.15. Решите неравенство:

а) $5^x \geqslant 125$; г) $6^x > 1296$;

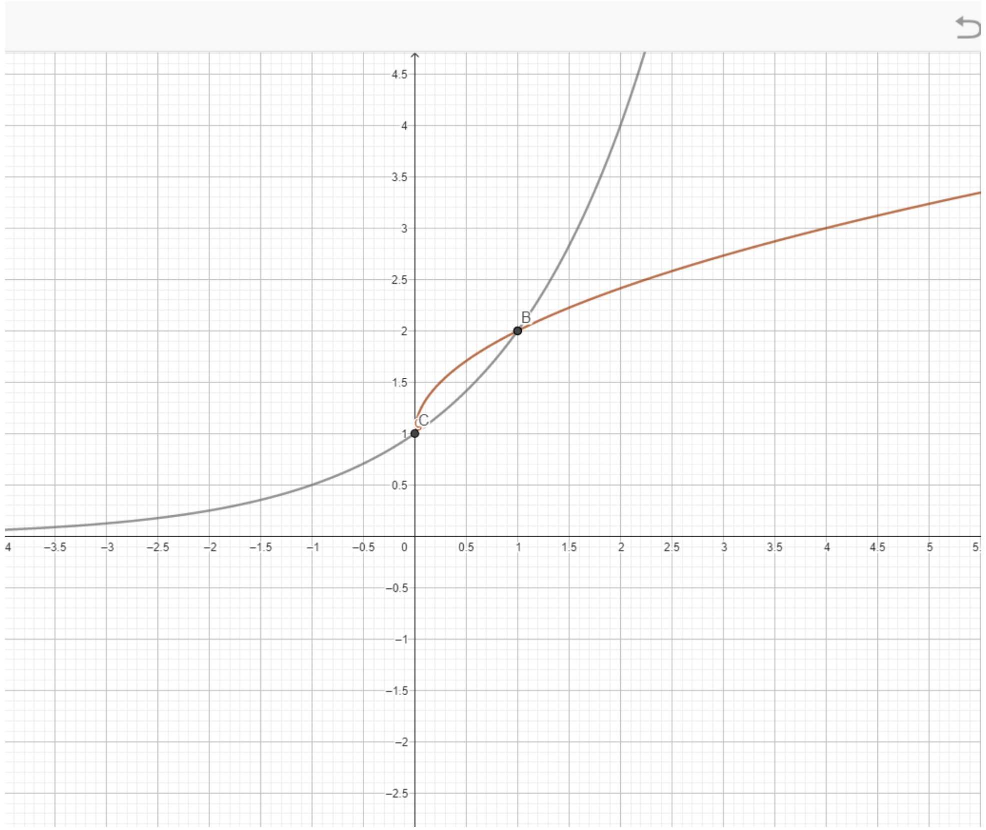
б) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \leqslant \frac{16}{625}$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \frac{32}{243}$;

в) $11^x < \frac{1}{121}$; е) $\left(\frac{1}{12}\right)^x > 144$.

ИКТ **46.16.** а) При каких значениях x график функции $y = 2^x$ лежит ниже графика функции $y = -1{,}5x - 1$?

б) При каких значениях x график функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ лежит ниже графика функции $y = 3x + 1$?

ИКТ **46.14.** а) $2^x = \sqrt{x} + 1$;



§ 47. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$

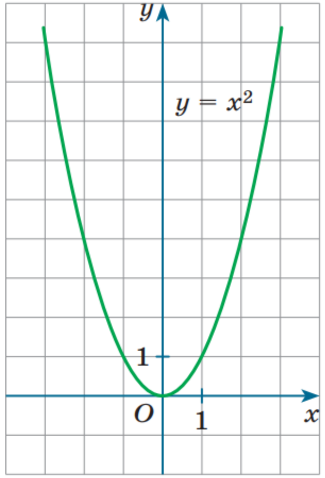


Рис. 177

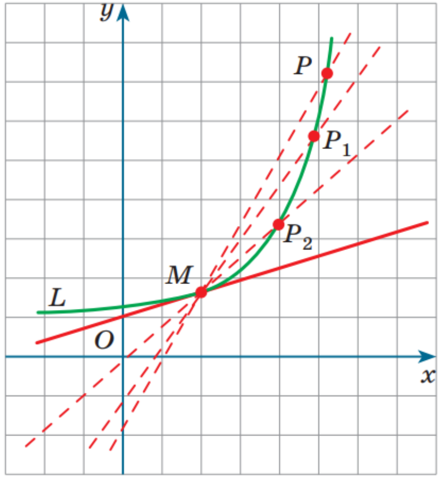


Рис. 178

вас спросят, какую из этих прямых можно назвать *касательной к параболе*, вы, опираясь на интуицию, скажете, что касательной является ось абсцисс. И это будет правильно. А как определить касательную к графику функции в некоторой точке в общем случае? Поговорим об этом.

Дана кривая L — график некоторой функции (рис. 178), на графике выбрана точка M. Нужно провести касательную к этому графику в точке M. Рассуждаем следующим образом. Возьмём ещё одну точку на этой кривой — точку P. Проведём секущую MP. Возьмём на кривой точку P_1 поближе к M, проведём секущую MP_1, затем точку P_2 ещё ближе к M и проведём секущую MP_2 и т. д. Как видите, секущая изменяет своё положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что в этом процессе секущая приближается к некоторому предельному положению. Эту прямую — предельное положение секущей — называют *касательной к кривой L в точке M*.

ИКТ Если, в частности, на параболе $y = x^2$ взять точку P, провести секущую OP, затем начать приближать точку P по параболе к точке O и проводить секущие, то вы увидите, что предельным положением этих секущих будет ось абсцисс, именно она и является касательной к параболе в точке O, что соответствует нашим интуитивным представлениям.

Проведём в точке $x = 0$ касательные к графикам трёх показательных функций $y = 2^x$, $y = 3^x$ и $y = 10^x$ (рис. 179, 180, 181). Видим, что чем больше основание, тем больше угол наклона касательной и оси

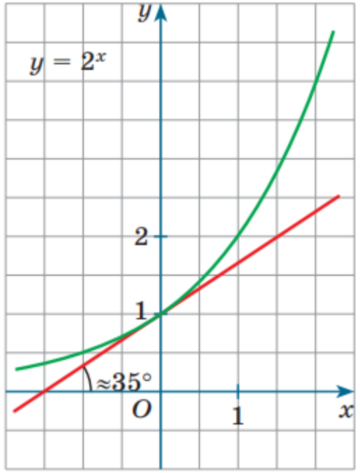


Рис. 179

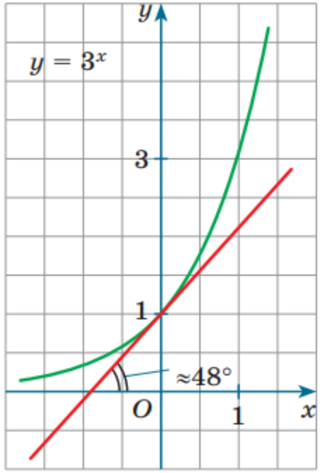


Рис. 180

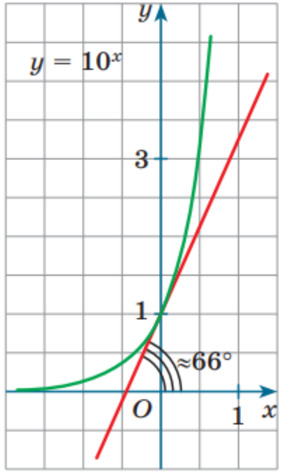


Рис. 181

абсцисс: касательная становится более «крутой». Можно убедиться в том, что касательная к графику функции $y = 2^x$ образует с осью абсцисс угол примерно в 35°, а для касательных к $y = 3^x$ и к $y = 10^x$ получатся углы наклона примерно в 48° и в 66°.

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно и непрерывно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно и непрерывно увеличивается от 35° да 66°. Значит, существует такое основание e,

§ 47. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$

что касательная к графику показательной функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ образует с осью абсцисс угол 45°. Это основание заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. В курсе высшей математики доказано, что $e = 2{,}7182818284590\ldots$, это иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). На практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

График показательной функции $y = e^x$ изображён на рисунке 182. Он отличается от графиков показательных функций с другими основаниями тем, что касательная к графику в точке $x = 0$ параллельна биссектрисе $y = x$

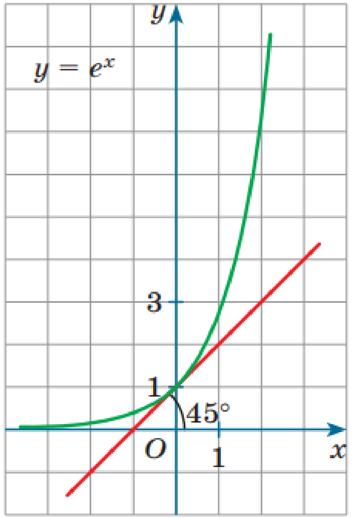


Рис. 182

первой и третьей координатных четвертей; угол наклона касательной к оси абсцисс равен 45°. Функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной*, а её график — *экспонентой*, хотя зачастую, для краткости, экспонентой называют и саму функцию $y = e^x$, и её график.

Функция $y = e^x$ чаще других показательных функций используется на практике. Приведём два стандартных, широко известных примера.

1) Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы не ограничены, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Установлено, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а $k > 0$ — некоторый коэффициент.

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банковской структуре, этот закон называют *законом показательного роста*.

2) В комнату с температурой 20 °С внесли кипящий чайник. При определённых условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20$ °С, а $T_0 = 100$ °С. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. С течением времени температура чайника будет приближаться к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют *процессами выравнивания*.

§ 48. Показательные уравнения

Пример 1 Решить уравнение:

а) $3^{2x^2} = 3^{5x-2}$; б) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{(0,25)^{x+1}} = 8^x$.

Решение. а) Согласно доказанной теореме уравнение $3^{2x^2} = 3^{5x-2}$ равносильно уравнению $2x^2 = 5x - 2$. Решив квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$, получим: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Это — корни заданного уравнения.

б) Поработаем по отдельности с левой и правой частями заданного уравнения:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^2\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{9x-6} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}.$$

Таким образом, можно переписать заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}$. Значит, $2x + 2 = 3x - 2$, $x = 4$.

в) Обратите внимание: все три основания степеней, фигурирующие в уравнении, можно привести к одному основанию 2. Это наблюдение — ключ к решению. Имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{(0,25)^{x+1}} = 8^x; \quad \frac{2^{0,5}}{(2^{-2})^{x+1}} = (2^3)^x; \quad \frac{2^{0,5}}{2^{-2x-2}} = 2^{3x};$$

$$2^{0,5-(-2x-2)} = 2^{3x}; \quad 2^{2,5+2x} = 2^{3x}; \quad 2,5 + 2x = 3x; \quad x = 2,5.$$

Ответ: а) $2, \frac{1}{2}$; б) 4; в) 2,5.

Завершая параграф, выделим три основных метода решения показательных уравнений.

1) *Метод уравнивания показателей*. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a — положительное число, отличное от 1, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Мы применили этот метод при решении примера 1.

2) *Метод введения новой переменной*. Мы применили этот метод при решении примеров 2 и 4.

3) *Функционально-графический метод*. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применили этот метод при решении примера 3.

Выполнение специальных заданий: Составление предписания по решению задач определённого типа

§ 48. Показательные уравнения

Решите уравнение

$$25^x+(x-31)\cdot 5^x=25x-150.$$

Решение:

Обозначим $p=5^x,\ p>0.$

Имеем $p^2+(x-31)\cdot p-(25x-150)=0.$

Получили квадратное относительно *p* уравнение с параметром *x*

$$D=(x-31)^2-4(25x-150)=(x+19)^2\geq 0.$$

$$p_1=\frac{31-x+x+19}{2}=25,\qquad p_2=\frac{31-x-x-19}{2}=6-x.$$

Сделаем обратную замену

$5^x=25\Leftrightarrow x=2.$

$5^x=6-x$

Рассмотрим функции $y=5^x$ и $y=6-x$

$y=5^x$ – возрастающая; $y=6-x$ – убывающая.

Следовательно, если решение есть, то оно единственное.

$x=1.$

Ответ. 1, 2.

Урок по теме «Понятие логарифма»

Урок «открытия» нового знания	Деятельность на уроке
Проверка домашнего задания, актуализация знаний.	Повторяются: графический способ решения уравнений, построение графика функции $y = 3^x$.
Мотивация открытия нового знания. Побуждение к получению новой информации.	Постановка задачи: решите уравнения $3^x = 9$ и $3^x = 5$.
Получение новой информации	Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.
Обработка новой информации	Анализ и формулировка проблемы. Выдвижение гипотезы: существует показатель степени $\log_3 5$, в которую необходимо возвести 3, чтобы получилось 5. Проверка гипотезы. Получение результата: понятие логарифма.
Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.	Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия логарифма.
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.	Выполнение самостоятельной работы. Работа с текстом учебника. Получение образовательного продукта: схемы доказательства иррациональности числа
Рефлексия. Осмысление изученного и сделанного	Подведение к выводу: раз мы узнали новое понятие, то следует более подробно изучить его свойства, взаимоотношение с уже известными понятиями.
Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	

§ 50. Понятие логарифма

Рассмотрим четыре показательных уравнения: $3^x = 9$, $3^x = \frac{1}{27}$, $3^x = \sqrt{3}$; $3^x = 5$. Первые три уравнения мы решим без труда, их корни — рациональные числа:

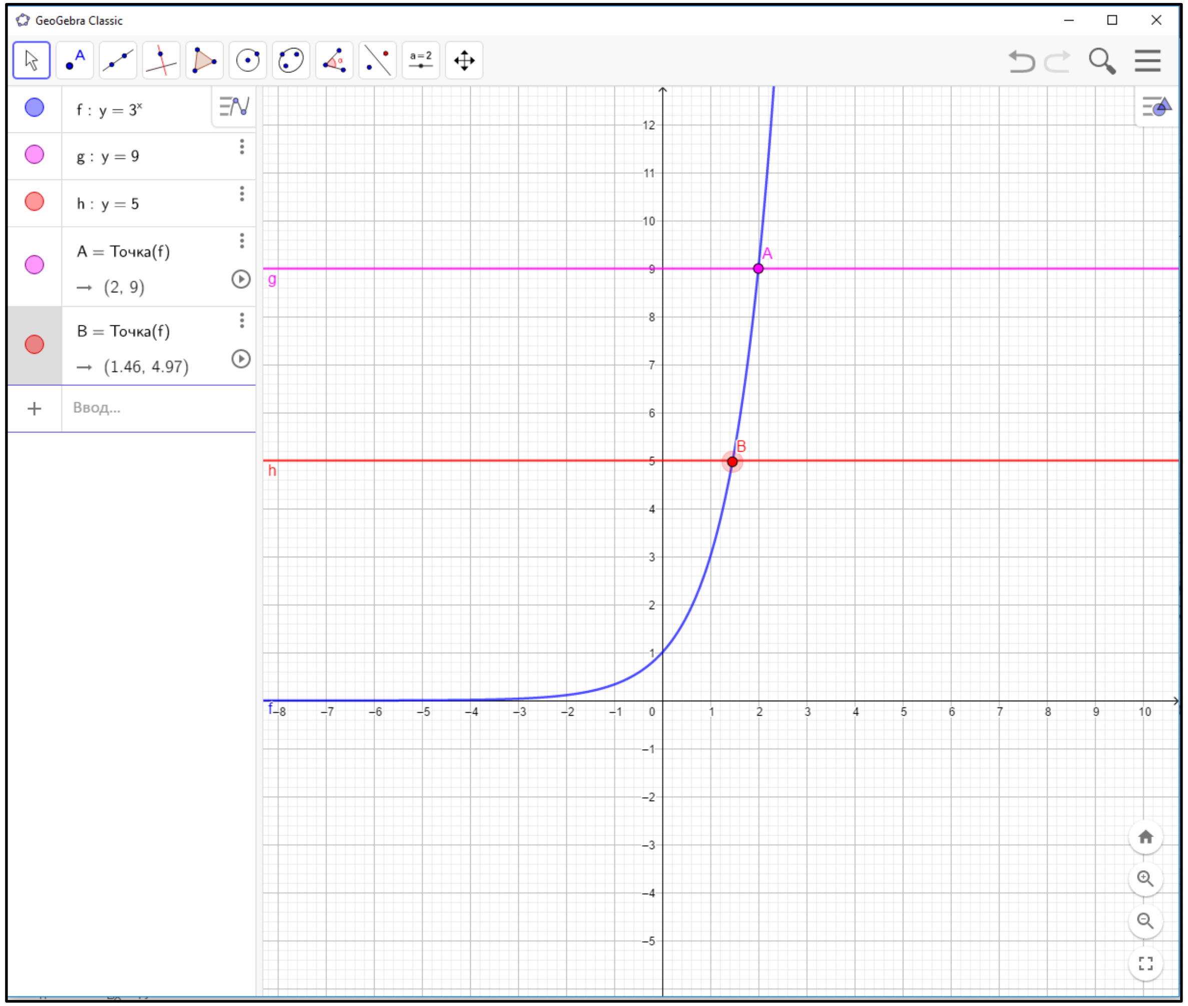
$$3^x = 9, \quad x = 2;$$

$$3^x = \frac{1}{27}, \quad x = -3;$$

$$3^x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Таблица «Верю – проверю»

Верю	Утверждение	Проверю
Да	Уравнение $3^x = 9$ имеет корни.	$x = 2$
Нет	Уравнение $3^x = 5$ имеет корни.	?



§ 50. Понятие логарифма

Пример 3 Доказать, что $\log_3 5$ — иррациональное число.

Решение. Предположим, что $\log_3 5$ — рациональное число, т. е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа. Равенство $\log_3 5 = \frac{p}{q}$ означает, что $3^{\frac{p}{q}} = 5$. Далее имеем: $\left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$, $3^p = 5^q$. Последнее равенство невозможно хотя бы потому, что число 5^q оканчивается цифрой 5, а никакая натуральная степень числа 3 цифрой 5 не оканчивается.

Получили противоречие, это значит, что сделанное предположение о том, что $\log_3 5$ — рациональное число, неверно. Вывод: $\log_3 5$ — иррациональное число.

Выполнение специальных заданий: Составление схемы доказательства

$$\log_3 5 = \frac{p}{q}$$

$$3^{\frac{p}{q}} = 5 \qquad НОД(3; 5) = 1$$

$$\left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q \qquad НОД(3^p; 5^q) = 1$$

$$3^p = 5^q$$

Противоречие

1. Пусть $\log_3 5$ – рациональное число, т.е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$;

2. $3^{\frac{p}{q}} = 5 \Leftrightarrow \left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q \Leftrightarrow 3^p = 5^q$;

3. Противоречие;

4. Результат $\log_3 5$ – иррациональные число.

§ 50. Понятие логарифма

С аналогичной «нештатной» ситуацией мы встретились в курсе алгебры 8-го класса, когда надо было найти положительный корень уравнений: $x^2 = 4$, $x^2 = 9$, $x^2 = 5$. Для первых двух уравнений всё просто: $x = 2$, $x = 3$. А чтобы записать корень третьего уравнения, пришлось вводить новый термин «квадратный корень» и новое обозначение $\sqrt{5}$. С уравнением $3^x = 5$ поступим так же: введём новый термин «логарифм» и новое обозначение $\log_3 5$ (читают: «Логарифм числа 5 по основанию три»). Итак, уравнение $3^x = 5$ мы решили: $x = \log_3 5$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$ (читают: «*Логарифм числа b по основанию a*»).

Выполнение специальных заданий:
Составление схемы определения

Логарифм числа b по основанию a:

1) $b > 0$ и

2) $a > 0$ и

3) $a \neq 1$ и

4) $a^{\log_a b} = b$

Найдите корень уравнения

54.4. а) $\log_{0,3}(x^2 + 8x - 13) = \log_{0,3}(x + 5)$;

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Выполнение специальных заданий:
Поиск ошибки в готовом решении

Решение 1:

$$x^2 + 8x - 13 = x + 5$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 2$$

Правильное решение?

Ответ: -9.

Решение 2:

$$x^2 + 8x - 13 = x + 5$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 2$$

Проверка:

$$x_1 = -9$$

$$\log_{0,3}\left((-9)^2 + 8\cdot(-9) - 13\right) = \log_{0,3}(-9+5)$$ – неверное равенство

$$x_2 = 2$$

$$\log_{0,3}\left(2^2 + 8\cdot 2 - 13\right) = \log_{0,3}(2+5)$$ – верное равенство

Ответ: 2.

Найдите корень уравнения

54.4. а) $\log_{0,3}(x^2+8x-13)=\log_{0,3}(x+5)$;

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение 3:

$$\begin{cases} x^2+8x-13=x+5, \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-18=0, \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=2 \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Решение 4:

Выполнение специальных заданий:
Поиск ошибки в готовом решении

$$\begin{cases} x^2+8x-13=x+5, \\ x^2+8x-13>0, \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-18=0, \\ \left[\begin{array}{l} x<-4-\sqrt{29}, \\ x>-4+\sqrt{29}, \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-4-\sqrt{29}, \\ x>-4+\sqrt{29}, \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x>-4+\sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Правильное решение?

Решите неравенство.

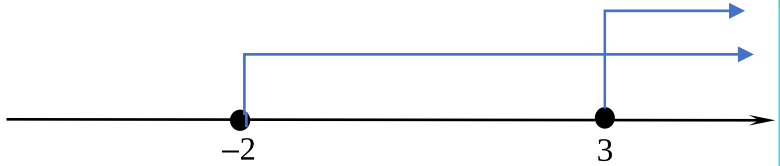
37.33. а) $(x-3)\log_3(x+3) \geqslant 0$;

Решение 1

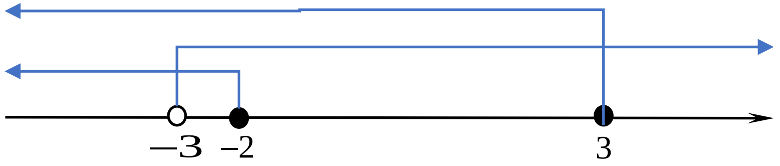
Сделаем равносильный переход

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0,\\ \log_3(x+3)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\le 0,\\ \log_3(x+3)\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ x+3\ge 1,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3,\\ 0<x+3\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ x\ge -2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3,\\ -3<x\le -2\end{cases}\end{array}\right.$$

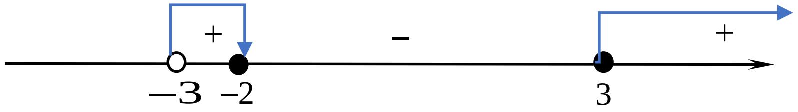
Решение 1-й системы



Решение 2-й системы



Решение совокупности



Ответ. $x\in(-3;\ -2]\cup[3;\ +\infty)$

Решите неравенство.

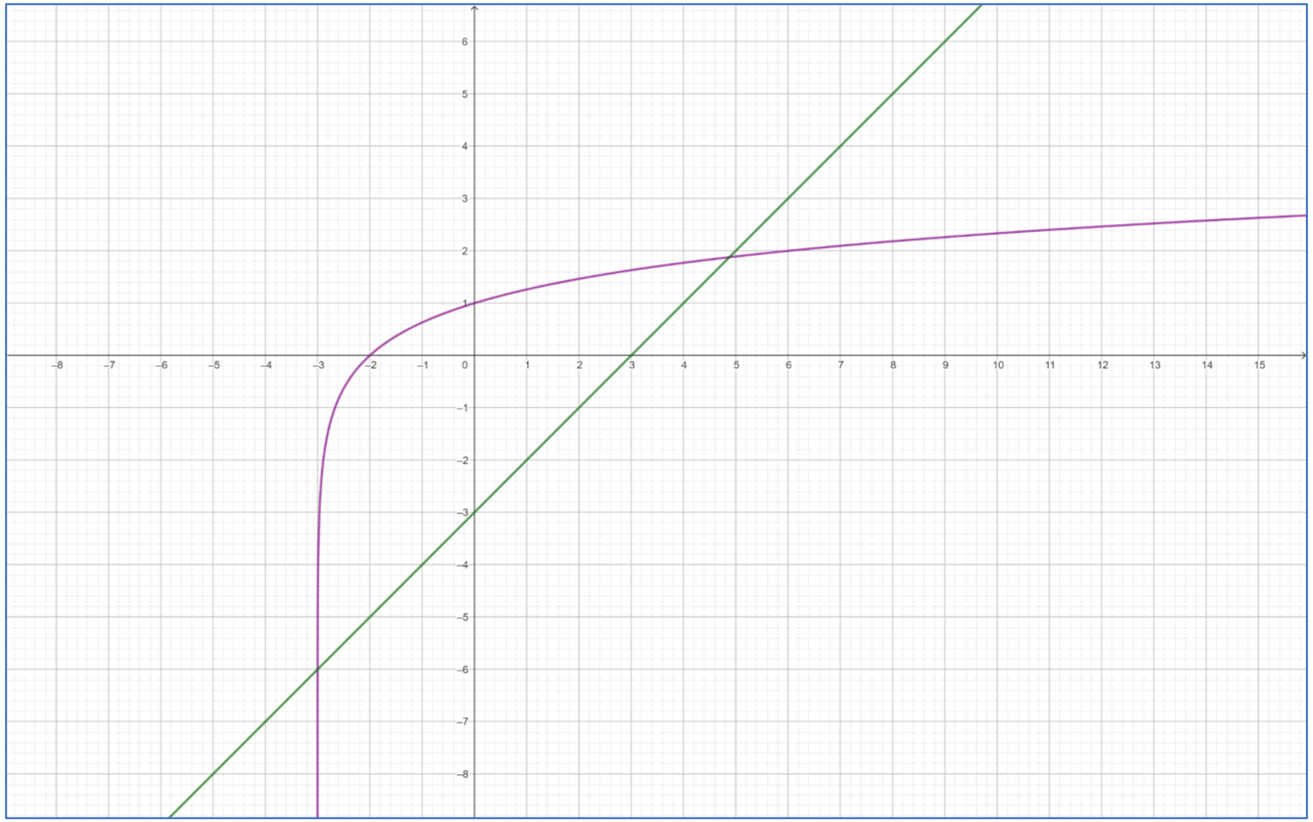
37.33. а) $(x-3)\log_3(x+3) \geqslant 0$;

Решение 2

Рассмотрим функции $y = x-3$; $y=\log_3(x+3)$

Функция $y=\log_3(x+3)$ определена при $x+3>0$, т.е. при $x\in(-3;\ +\infty)$

Построим графики этих функций в одной системе координат

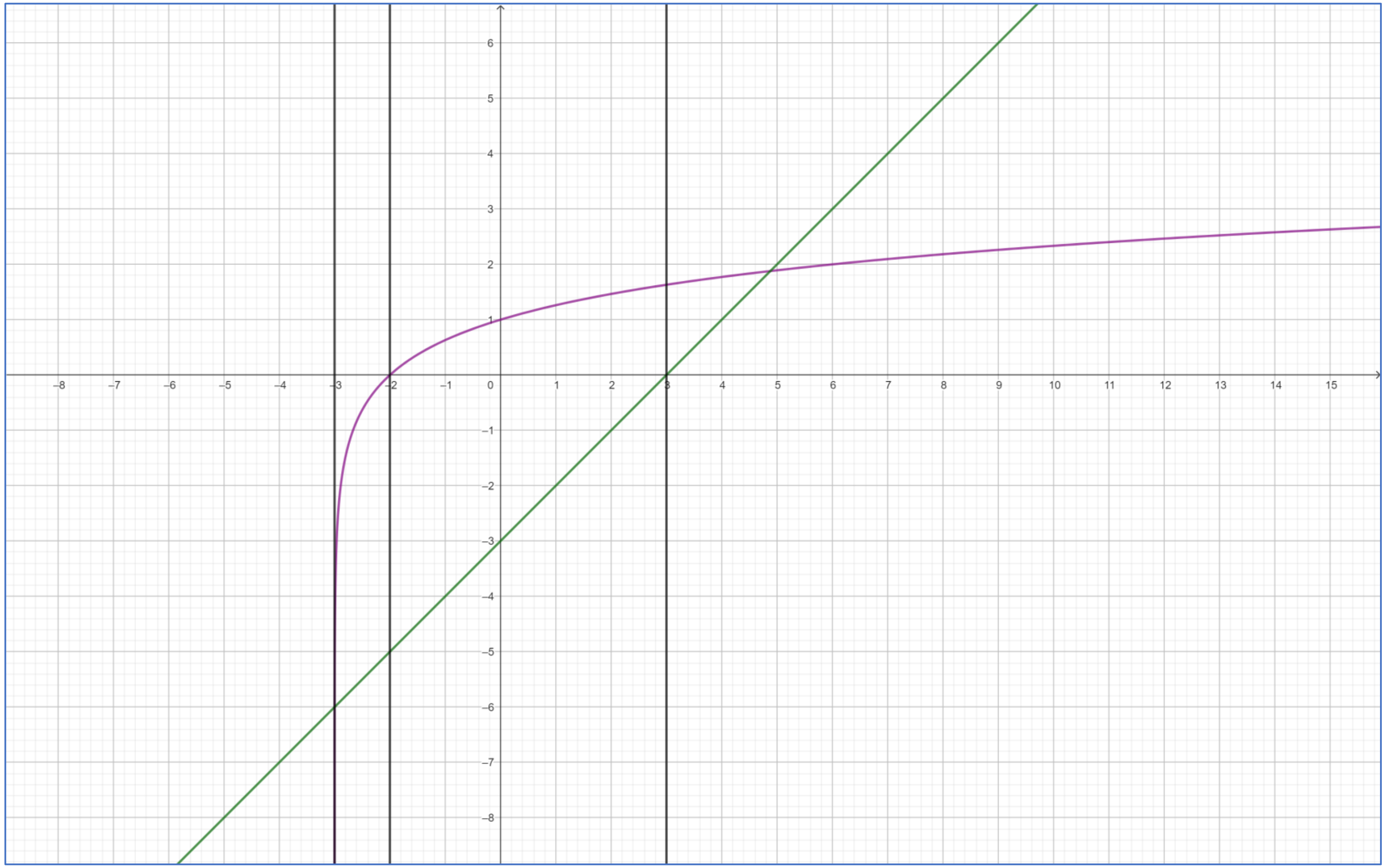


Решите неравенство.

37.33. а) $(x-3)\log_3(x+3) \geqslant 0$;

Метод интервалов

Решение 2



Решение: промежутки, на которых обе функции одновременно принимают неположительные или неотрицательные значения $x \in (-3;\ -2] \cup [3;\ +\infty)$

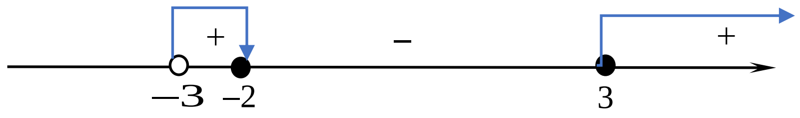
Решите неравенство.

37.33. а) $(x-3)\log_3(x+3) \geqslant 0$;

Решение 3

Применим приём рационализации

$$\begin{cases}(3-1)(x-3)(x+3-1)\ge 0,\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x+2)\ge 0,\\ x>-3\end{cases} \Leftrightarrow (-3;\ \ 2]\cup[3;\ \ +\infty)$$

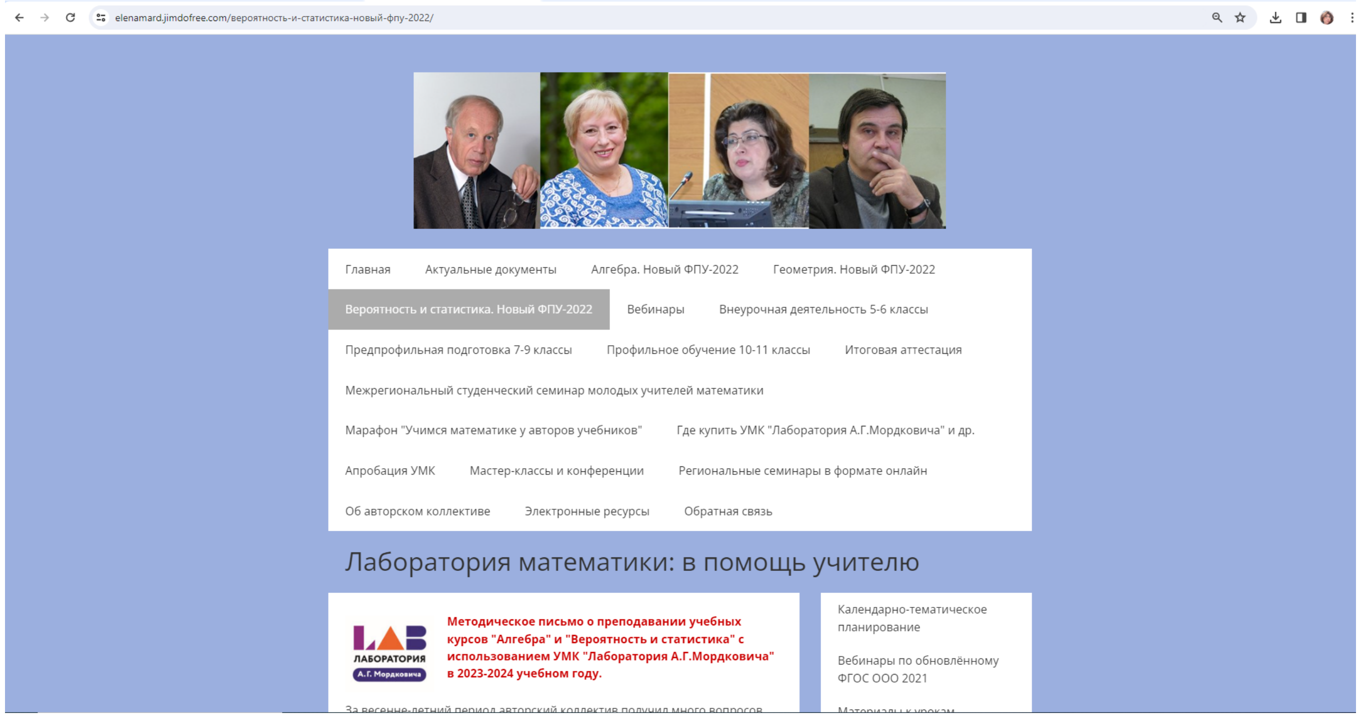


Ответ. $x\in(-3;\ \ -2]\cup[3;\ \ +\infty)$

Адрес обратной связи:

kaf.matematika@gmail.com

Методическое сопровождение учителей математики через авторский сайт https://elenamard.jimdofree.com



В СОЮЗЕ С МАТЕМАТИКОЙ

Преподавание математики в основной и средней школе.

https://t.me/souzmatematikov

@SOUZMATEMATIKOV

Всероссийский консультационный центр

«Готовимся к итоговой аттестации с авторами учебников»

22.03.2024 в 15:00 (мск) третий прямой эфир по вопросам методики подготовки к итоговой аттестации.

В чём суть проекта?

Совместный педагогический поиск путей создания образовательной среды на уроках математики, направленной на обеспечение готовности обучающихся к прохождению итоговой аттестации.

Подключайтесь к T.me, принимайте участие в прямых эфирах, задавайте вопросы авторам об изучении различных тем, отражённых в итоговой аттестации.

Подведение итогов:

28.03.2024

Призовой фонд: Комплект пособий «Трудные задания ЕГЭ».